[illegible]

CALCOLO

DIFFERENZIALE

ELEMENTI

DI

CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE

DI

BOUCHARLAT

DOTTORE NELLE SCIENZE, MEMBRO DELLE ACCADEMIE REALI DI BORDEAUX, DI LYON, DI MARSEILLE, DI ROUEN, DI TOULOUSE E DI ALTRE SOCIETA' DOTTE E LETTERARIE.

TERZA EDIZIONE

RIVEDUTA ED AUMENTATA

SECONDA TRADUZIONE ITALIANA

DI **F. DE LUCA**

FATTA SOPRA L'OPERA USCITA DAI TORCHI DEL SIGNOR BACHELIER, SUCCESSORE M. V. COURCIER IN PARIGI: ANNO 1826.

NAPOLI

DALLA STAMPERIA DI R. MANZI

A spese di Giuseppe Russo strada Nilo n.° 2.

1832.

L' EDITORE

ALLA STUDIOSA GIOVENTU'.

Lo scrivere delle buone Istituzioni non è lo stesso che lo scrivere un buon libro. Quanti e quanti scrivono delle buone opere ; ma non hanno tutte le qualità , onde scrivere de' buoni elementi pel vantaggio della studiosa Gioventù. Il Signor Boucharlât sembra dotato di tutte le qualità per agevolare colle sue opere matematiche alla studiosa gioventù lo studio delle scienze esatte , divenuto tanto necessario a tutte le professioni , per l' influenza che vi esercita. Egli ha pubblicato finora gli elementi di calcolo differenziale ed integrale , gli elementi di meccanica , e la teoria delle curve , e delle superficie di secondo grado. Queste istituzioni sono preziose per la scelta del metodo , per quella delle dimostrazioni , e per la brevità. Il rapido spaccio che se ne fa , e le continue richieste che giungono a' librai da tutte le parti , giustificano il merito di queste istituzioni. Perciò , onde fare cosa grata alla studiosa gioventù , mi sono impegnato a dare la prima versione italiana di queste opere , per l' eleganza , ed esattezza della quale non ho risparmiato mezzo.

PREFAZIONE

DELL' AUTORE.

Nella Storia delle conoscenze umane vi sono delle epoche, nelle quali il genio dopo di essersi elevato alle più sublimi astrazioni, sembra arrestarsi per qualche tempo ne' suoi voli, per prendere ben presto nuova forza, e distinguersi con una di quelle scoverte che cambiano la faccia della scienza.

Così Cartesio coll' applicazione dell' Algebra alla Geometria, si aprì una strada ignota a' suoi Predecessori, e Newton e Leibnitz riempirono di meraviglia la dotta Europa coll' invenzione di un' analisi superiore ancora alla Geometria di Cartesio.

Non vi fu giammai scoverta che onorasse più lo spirito umano: l' infinito, questo essere ideale, parve sottomesso al calcolo, ed operar de' prodigii. Invano qualche Filosofo cercò di sparger de' dubii sull' esattezza di un' analisi così singolare: essi non poterono contrastarne i risultamenti, e non fecero ch' eccitare i geometri a meditar di vantaggio sulla vera metafisica de' nuovi calcoli. Newton, il primo, penetrò questo mistero, considerando il calcolo differenziale, come il metodo delle prime ed ultime ragioni delle quantità, o altrimenti, come il metodo de' limiti del loro rapporto. D' Alembert presentò le idee di Newton, come racchiudendo la vera metafisica del Calcolo differenziale, e dimostrò che col metodo de' limiti si può dare una spiegazione soddisfacente di quello delle flussioni degl' Inglesi, ponendo da banda ogni considerazione di movimento, idea straniera al Calcolo differenziale. Posteriormente a D' Alembert, molti Geometri, e tra gli altri Cousin, hanno esposto ne' loro scritti il metodo de' limiti; ma questo non ha ricevuto tutta la sua chiarezza, che dopo di essere stato dimostrato per mezzo del teore-

ma di Taylor: fu allora, che si dissiparono interamente i dubbii che poteano nascere sulla metafisica speciosa del metodo degl' infinitamente piccoli, metodo che può essere riguardato, come una specie di abbreviamento di quello de' limiti.

Il metodo degl' infinitamente piccoli non è più, sotto questo rapporto, che un mezzo più spedito per trovare i differenziali delle diverse funzioni: esso imprime questi differenziali nella nostra memoria, per mezzo di figure geometriche ridotte all' ultimo grado di semplicità, e che parlano all' immaginazione più delle idee astratte.

Questo metodo infine diviene indispensabile nelle alte parti della Meccanica, e dell' Astronomia, nella quale, senza il suo soccorso, la risoluzione de' problemi diverrebbe sovente di un' estrema complicazione; perciò i nostri grandi geometri ne fanno sovente uso nelle parti più sublimi de' loro scritti.

Questo metodo ebbe altre volte ardenti difensori, nella sua stessa metafisica, poicchè, se non si abbandona una certa serie di proposizioni, sembra di avere in tutto il rigore matematico, e di dipendere naturalmente da un principio fondamentale.

Questo principio è stato riguardato finora come una specie di assioma: ma il punto di veduta, sotto il quale esso ci fa considerare l' infinito, presentandoci delle conseguenze difficili ad essere ammesse, io ho creduto doverlo dimostrare, dando per base al metodo degl' infinitamente piccoli, un' altro principio, il quale fondato egualmente sulle nozioni che noi abbiamo dell' infinito, soddisfa più alla ragione, coll' idea de' limiti, che tacitamente racchiude.

Se il metodo de' limiti rende esatto quello degl' infinitamente piccoli, rettificando ciocchè può esservi di difettoso in quest' ultimo, quello di Lagrange nulla più lascia a desiderare al metodo de' limiti, con far dipendere i coefficienti differenziali dall' Algebra pura.

Questi tre metodi possono dunque considerarsi, per così dire, come facendo parte di un solo: perciò paragonandoli, si riconosce che i principii, i quali ne derivano, loro sono comuni, e che per comprenderli tutti, non bisogna che aggiugnere poche cose a quello de' limiti. Il metodo di Lagrange riducesi allora in certo modo ad un teorema, che io ho renduto estremamente facile con delle modificazioni, che ho fatto nella sua dimostrazione.

Io non mi sono meno occupato a presentare sotto un aspetto favorevole le diverse teorie, di cui si compone questo Trattato. Come nelle mie altre opere Matematiche, vi ho sviluppato tutte le operazioni, persuaso che non consiste nel sopprimerle, che un Autore può dare un' idea più vantaggiosa della profondità delle sue conoscenze; e ch' esso non dee esser giudicato, che dalla maniera colla quale espone le sue idee, e dalle vedute più o meno nuove sparse ne' suoi scritti.

A queste considerazioni io aggiugnerò, che, da che un autore si assoggetta così a non omettere veruna idea intermedia, a forza di precisione si possono solamente evitare le lungherie tanto nocive all' insieme di una teoria; e la difficoltà diviene più grande ancora, quando una parte dell' opera è destinata a render ragione delle cose.

Tra tutte le addizioni che ho fatto a questa novella edizione, citerò solamente qualche considerazione che tende a dare l'ultimo grado di rigore ai principj della differenziazione, e la quale prova che tutti quelli i quali non dipendono dalla Trigonometria possono essere fondati sulla sola formola del binomio. Egli è vero che nella dimostrazione che si rapporta alle quantità esponenziali e logaritmiche si fa uso del teorema di Maclaurin, ma io fo vedere che anche in questa dimostrazione si può agevolmente evitare l' uso di questo teorema. Do in seguito un novello metodo per giugnere speditissimamente a questi differenziali.

*Il calcolo infinitesimale, più che alcun' altra parte delle Matematiche, essendo composto di una moltitudine di teoriche, che sono sovente indipendenti le une dalle altre, ho creduto dover indicare con caratteri più piccoli * le cose che possono essere trascurate nella prima lettura. Perciò quelli che vogliono fare uno studio poco profondo dell' alta Geometria, potranno consultare le sole parti più elementari di quest' Opera, mentre che quelli che desiderano acquistare delle conosenze più estese, dopo di essersi famigliarizzati co' principii, percorreranno con più frutto le altre parti.*

---

* Tutto ciò che nell' originale è scritto con caratteri più piccoli, qui sarà distinto dal segno ** posto innanzi al paragrafo.

ELEMENTI

DI CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE

CALCOLO DIFFERENZIALE

Della differenziazione delle quantità Algebriche.

1. Una variabile dicesi funzione di un' altra, allorchè la prima è uguale ad una certa espressione analitica della seconda; per esempio y è funzione di x nelle seguenti equazioni

$$y=\sqrt{a^2-x^2}, y=x^3-3bx^2, y=\frac{x^2}{a}, y=b+cx^3.$$

2. Consideriamo una funzione nel suo stato di accrescimento, in virtù di quello della variabile, ch' essa racchiude: ogni funzione di una variabile x potendo esser rappresentata dall' ordinata di una curva RMM' fig. 1, siano dunque $AP=x$, e $PM=y$ le coordinate di un punto M di questa curva, e supponiamo, che l' ascissa AP riceva un accrescimento $PP'=h$; l' ordinata PM diverrà $P'M'=y'$. Per ottenere il valore di questa nuova ordinata, si vede dunque, che bisogna cambiare x in $x+h$ nell' equazione della curva, e 'l valore che allora questa equazione doterminerà per y, sarà quello di y'.

Per esempio se si avesse l' equazione $y=mx^2$, si avrebbe y' cambiando x in $x+h$, il che darebbe

$$y'=m(x+h)^2, \text{ o } y'=mx^2+2mxh+mh^2$$

3. Prendiamo ora l' equazione

$$y=x^3 \ldots. (1)$$

e supponiamo che y divenga y', allorchè x diviene $x+h$; si avrà

$$y'=(x+h)^3$$

e sviluppando,

$$y'=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3:$$

Se da questa equazione ne togliamo l'altra (1), resterà

$$y'-y=3^2xh+3xh^2+h^3;$$

e dividendo per h, si avrà

$$\frac{y'-y}{h}=3x^2+3xh+h^2\ldots\ldots\ (2)$$

Vediamo qual conseguenza possiamo dedurre da ciò: $y'-y$ rappresenta l'accrescimento della funzione y in virtù dell'aumento h dato ad x; poicchè la differenza $y'-y$ è quella del nuovo stato della grandezza di y rispetto al suo stato primitivo.

Da un'altra parte l'accrescimento di x essendo h, ne segue che l'espressione $\frac{y'-y}{h}$, è il rapporto dell'accrescimento della funzione y a quello della variabile x. Esaminando il secondo membro dell'equazione (2), si vede che questo rapporto tanto più diminuisce, quanto più diminuisce h, e che, allorchè h diviene nullo, esso si riduce a $3x^2$.

Il termine $3x^2$ è dunque il limite del rapporto $\frac{y'-y}{h}$; a questo termine esso sempre più si avvicina a proporzione che si fa diminuire h.

4. Nell'ipotesi di $h=0$, divenendo ancor nullo l'accrescimento di y, il rapporto $\frac{y'-y}{h}$ si riduce a $\frac{0}{0}$, e per couseguenza l'equazione (2) diviene

$$\frac{0}{0}=3x^2\ldots(3)$$

Questa equazione non ha niente di assurdo, poicchè l' algebra c' insegna che $\frac{o}{o}$ può rappresentare ogni sorta di quantità. D' altronde è noto che dividendo i due termini di una frazione per uno stesso numero, questa non cambia di valore; ne segue perciò che la picciolezza de' termini di una frazione non influisce per nulla sul suo valore, e che perciò essa può restare la stessa, allorchè i suoi termini sono giunti all' ultimo grado di piccolezza, cioè allorchè sono divenuti nulli.

La frazione $\frac{o}{o}$ che si trova nell' equazione (3) è un simbolo che ha rimpiazzato il rapporto dell' accrescimento della funzione a quello della variabile: come questo simbolo non lascia alcun segno di questa variabile, rappresentiamolo con $\frac{dy}{dx}$; allora $\frac{dy}{dx}$ ci farà conoscere che la funzione era y, e la variabile x. Ma dy e dx saranno parimente riputate per nulle, e noi avremo

$$\frac{dy}{dx}=3x^2 \ldots\ (4):$$

$\frac{dy}{dx}$, o piuttosto il suo valore $3x^2$ è il coefficiente differenziale della funzione y.

Osserviamo, ch' essendo $\frac{dy}{dx}$ il segno che rappresenta il limite $3x^2$ (come lo mostra l'equazione (4)), dx, dee esser sempre situato sotto dy. Intanto per facilitare le operazioni dell' Algebra, si può momentaneamente fare svanire il denominatore dell' equazione (4), e si avrà $dy=3x^2dx$. L' espressione $3x^2dx$ è il differenziale della funzione y.

5. Cerchiamo ancora il differenziale della funzione

$a+3x^2$. A tal oggettto, bisogna fare $x=x+h$ nell' equazione $y=a+3x^2$; cambiando y in y' questa equazione diverrà

$$y'=a+3x^2+6xh+3h^2\,;$$

dunque $\frac{y'-y}{h}=6x+3h$; eguagliando h a zero, ne risulta

$$\frac{dy}{dx}=6x:$$

Dunque il differenziale cercato è $dy=6xdx$.

6. Per terzo esempio, cerchiamo il differenziale di $y=ax^3-b^3$; facciasi $x=x+h$; sostituendo avremo

$$y'=ax^3+3ax^2h+3axh^2+ah^3-b^3\,;$$

dunque sarà

$$\frac{y'-y}{h}=3ax^2+3axh+ah^2\,;$$

passando al limite si avrà

$$\frac{dy}{dx}=3ax^2$$

Questo è il coefficiente differenziale della funzione proposta; il differenziale sarà

$$dy=3ax^2dx.$$

7. Proponiamoci di trovare ancora il differenziale di $y=\frac{1-x^3}{1-x}$; facendo la divisione, si trova $1+x+x^2$; mettendo $x+h$ in luogo di x, ed y' in vece di y, si ottiene

$$y'=1+x+h+x^2+2hx+h^2\,;$$

ed ordinando per rapporto ad h

$$y'=1+x+x^2+(2x+1)h+h^2\,;$$

dunque sarà

$$\frac{y'-y}{h}=2x+1+h\,;$$

passando al limite si ha $\frac{dy}{dx}=2x+1$; dunque il differenziale di $\frac{1-x^3}{1-x}$ è $(2x+1)dx$

8. Prendiamo ancora per esempio

$$y(x^2-2a^2)(x^2-3a^2);$$

sviluppando si ha

$$y=x^4-5a^2x^2+6a^4;$$

sostituendo $x+h$ ad x, ed y' ad y, ed ordinando in seguito rispetto ad h, ne viene

$$y'=x^4-5a^2x^2+6a^4+(4x^3-10a^2x)h$$
$$+(6x^2-5a^2)h^2+4xh^3+h^4;$$

dunque sarà

$$\frac{y'-y}{h}=4x^3-10a^2x+(6x^2-5a^2)h+4xh^2+h^3;$$

passando al limite si ha

$$\frac{dy}{dx}=4x^3-10a^2x;$$

e moltiplicando per dx, si trova che il differenziale è

$$dy=(4x^3-10a^2x)dx.$$

9. L' espressione dx è essa stessa il differenziale di x; poichè sia $y=x$, si ha $y'=x+h$; dunque $y'-y=h$, e per conseguenza $\frac{y'-y}{h}=1$. Come la quantità h non entra nel secondo membro di quest' equazione, si vede che per passare al limite egli convien cangiare $\frac{y'-y}{h}$ in $\frac{dy}{dx}$; ciò che dà $\frac{dy}{dx}=1$: dunque $dy=dx$;

10. Nello stesso modo si troverà che il differenziale di ax è adx; ma se si abbia $y=ax+b$, si otterrà ancora adx per differenziale; donde ne siegue che una costante b, non affetta di x, non dà termine alcuno alla differenziazione, o detto in altr[illegible]ini, non ha differenziale.

Si può inoltre considerare che avendosi $y=b$, caso ove a è nullo nell' equazione $y=ax+b$, e che perciò $\frac{dy}{dx}=a$ diviene $\frac{dy}{dx}=0$, non si avrà nè differenziale nè limite.

11. Bisogna osservare, che qualche volta l'accrescimento della variabile è negativo: in questo caso basta di sostituire $x-h$ ad x, ed operare, come precedentemente si è fatto.

Così per trovare il differenziale di ax^3, quando l'accrescimento è negativo, si sostituirà $x-h$ ad x, e si avrà

$$y'=ax^3-3ax^2h+3axh^2-ah^3\ ;$$

e perciò

$$\frac{y'-y}{h}=-3ax^2+3axh+ah^2\ ;$$

passando al limite si avrà $\frac{dy}{dx}=-3ax^2$, e perciò $dy=-3ax^2dx$. Si vede che si ha lo stesso risultamento, con supporre dx negativo nel differenziale di y calcolato nell'ipotesi di un accrescimento positivo.

12. Prima d' innoltrarci di più, facciamo un' osservazione essenziale, ed è che se in una equazione della forma $y=fx$ (cioè $y=$ funzione di x) si cambia x in $x+h$, e che dopo di aver ordinato per le potenze di h, si trova lo sviluppo seguente

$$y'=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{ec.},$$

si ha sempre $y=A$. Infatti, se si fa $h=0$, il secondo membro si riduce ad A: riguardo al primo, come noi non abbiamo segnato con un accento y, se non per indicare che y subiva un certo cambiamento, allorchè x diveniva $x+h$; bisognerà che sopprimiamo l' accento di y, allorchè h sarà nullo, per cui l' equazione si ridurrà ad

$$y=A.$$

13. Da ciò noi ne dedurremo il modo di rendere generale il metodo della differenziazione. Infatti se

nell' equazione $y=fx$, nella quale si è supposta nota l'espressione rappresentata da fx, siasi sostituito $x+h$ ad x, e che dopo di aver ordinato per rapporto alle potenze di h, si sia ottenuto lo sviluppo seguente

$$y'=A+Bh+Ch^2+Dh^3$$

o piuttosto, dietro ciò che si è detto nell' articolo precedente

$$y'=y+Bh+Ch^2+\text{ ec.},$$

si avrà, togliendo da questa l'equazione primitiva

$$y'-y=Bh+Ch^2+\text{ ecc.}$$

e perciò

$$\frac{y'-y}{h}=B+Ch+\text{ ecc.},$$

e passando al limite $\frac{dy}{dx}=B$. Dal che ne conchiudiamo, che il coefficiente differenziale è eguale al coefficiente del termine che contiene la prima potenza di h nello sviluppo di $f(x+h)$ ordinato per rapporto alle potenze ascendenti di h.

14. Se in luogo di una funzione y che varia in virtù dell' accrescimento dato alla variabile x ch'ella contiene, noi avremo due funzioni y e z di questa stessa variabile x, e che particolarmente si sanno trovare i differenziali di ciascuna di queste funzioni, egli sarà facile per la dimostrazione seguente dedurne il differenziale zy di queste funzioni. Infatti se si sostituisce $x+h$ ad x nelle funzioni y, e z, si otterranno due sviluppi, che ordinati per rapporto alle potenze di h, potranno rappresentarsi per

$$y'=y+Ah+Bh^3+\text{ ecc. . . . . } (5)$$
$$z'=z+A'h+B'h^2+\text{ ecc. . . . . } (6)$$

passando al limite si trova

$$\frac{dy}{dx}=A\,,\ \frac{dz}{dx}=A'\ldots\ldots(7);$$

in seguito moltiplicando l'equazioni (5) e (6) l'una per l'altra avremo

$$\begin{aligned} z'y' = zy + Azh + Bzh^2 + \text{ ecc.} \\ + A'yh + AA'h^2 + \text{ ecc.} \\ + B'yh^2 + \text{ ecc.}; \end{aligned}$$

E perciò

$$\frac{z'y' - zy}{h} = Az + A'y + (Bz + AA' + B'y)h + \text{ec.};$$

e passando al limite

$$\frac{d.zy}{dx} = Az + A'y ;$$

mettendo in vece di A ed A' i loro valori dall'equazioni (7), ne verrà

$$\frac{dzy}{dx} = \frac{zdy}{dx} + \frac{ydz}{dx};$$

e togliendo il divisore comune dx si avrà

$$d.zy = zdy + ydz$$

Sicchè per avere il differenziale di un prodotto di due variabili, bisogna moltiplicare ciascheduna di esse pel differenziale dell' altra, e sommare i prodotti.

15. Per mezzo di questa regola, si troverà facilmente il differenziale di un prodotto di tre variabili.

Sia, per esempio yzu: facciamo $yz = t$, avremo $dyzu = d.tu$. Or da ciò che precede si ha:

$$d.tu = tdu + udt \dots (8);$$

e poicchè $t = yz$, si ha $dt = ydz + zdy$; mettendo dunque questi valori di t e di dt nell'equazione (8), essa si cambierà in

$$d.yzu = yzdu + uydz + uzdy.$$

Si vede che la stessa regola sussiste ancora pel prodotto di tre variabili, cioè che *bisogna scrivere il prodotto* zyu, *e rimpiazzare successivamente ciascuna variabile per mezzo del suo differenziale, e sommare questi prodotti.*

La stessa regola ha luogo per un maggior numero di variabili.

16. Il differenziale di una frazione $\frac{z}{y}$ è $\frac{y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y}{y^2}$;
poicchè supponiamo $\frac{z}{y}=t$, avremo $z=yt$; dunque, art. 14, $\mathrm{d}z=y\mathrm{d}t+t\mathrm{d}y$, da cui ne tiriamo $y\mathrm{d}t=\mathrm{d}z-t\mathrm{d}y$: mettendo il valore di t nel secondo membro, ne verrà $y\mathrm{d}t=\mathrm{d}z-\frac{z}{y}\mathrm{d}y$; riducendo allo stesso denominatore ne verrà

$$\mathrm{d}t=\frac{y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y}{y^2},\ \text{cioè}\ \mathrm{d}\frac{z}{y}=\frac{y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y}{y^2}.$$

17. Se nell' equazione $\mathrm{d}yzu=yz\mathrm{d}u+yu\mathrm{d}z+zu\mathrm{d}y$, art. 15, si dividano tutt'i termini per yzu, si otterrà

$$\frac{\mathrm{d}.yzu}{yzu}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}z}{z}+\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

In generale dividendo il differenziale del prodotto di un numero qualunque di variabili per lo stesso prodotto, si troverà

$$\frac{\mathrm{d}.xyztu\,\text{ec.}}{xyztu\,\text{ec.}}=\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}z}{z}+\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}u}{u}\ \text{ecc.}\quad (9).$$

Se y, z, t, u, ecc. sono eguali ad x ed in numero m, si avrà nel secondo membro di questa equazione un numero m di termini eguali a $\frac{\mathrm{d}x}{x}$; questo secondo membro si cambierà dunque in $\frac{m\mathrm{d}x}{x}$, e l'equazione (9) diverrà $\frac{\mathrm{d}x^m}{x^m}=m\frac{\mathrm{d}x}{x}$, e moltiplicando per x^m, si avrà

$$\mathrm{d}.x^m=mx^{m-1}\mathrm{d}x.$$

18. D' onde può conchiudersene questa regola: *allorchè una variabile è elevata ad una potenza m; per averne il differenziale, bisogna 1.° cambia-*

re l' esponente in coefficiente ; 2.° mettere sulla variabile un esponente minore di una unità ; 3.° in seguito moltiplicare questo prodotto per dx.

19. Se l' esponente fosse fratto o negativo, la stessa regola avrebbe luogo. Per dimostrare il primo caso, sia $y=x^{\frac{p}{q}}$; elevando i due membri alla potenza q, si avrà $y^q=x^p$; dunque art. 21, $qy^{q-1}dy=px^{p-1}dx$; da cui si tira $dy=\frac{px^{p-1}dx}{qy^{q-1}}$,

e come x^{p-1}, y^{p-1} possono rispettivamente mettersi sotto la forma $\frac{x^p}{x}$, $\frac{y^q}{y}$, mettendo questi valori, si avrà $dy=\frac{p}{q}\,\frac{x^p}{y^q}\,\frac{y}{x}dx$;

ed a causa di $x^p=y^q$, l' equazione precedente si ridurrà a $dy=\frac{p}{q}\,\frac{y}{x}dx$;

mettendo in fine per y il suo valore $x^{\frac{p}{q}}$, si otterrà

$$dy=\frac{p}{q}\times\frac{x^{\frac{p}{q}}}{x}dx,$$

e facendo passare il divisore x ad esponente, si avrà

$$dy=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\ dx$$

e questa espressione è la stessa di quella che si sarebbe avuta, prendendo il differenziale di $y=x^{\frac{p}{q}}$ per mezzo della regola n.° 18.

Per dimostrare il caso, in cui l' esponente è negativo, sia $y=x^{-p}$, cioè $y=\frac{1}{x^p}$: differenziando colla regola delle frazioni art. 21, avremo

$$dy=\frac{x^p d1 - 1 dx^p}{x^p . x^p}.$$

Osservando, che l' unità, come grandezza costante, non ha differenziale, questa espressione riducesi a

$$dy=-\frac{dx^p}{x^{2p}};$$

effettuando la differenziazione indicata art. 21, si avrà

$$dy=\frac{-px^{p-1}dx}{x^{2p}}=-px^{p-1-2p}dx=-px^{-p-1}\ dx\ ,$$

come si sarebbe anche avuto facendo uso della regola n.° 18. Conchiudiamo che questa regola ha luogo qualunque sia l' esponente di x, cioè a dire per un' esponente intiero, negativo, o fratto.

20. Si può pervenire immediatamente al differenziale di x^m per la considerazione del binomio: della maniera seguente, facendo $x=x+h$ in $y=x^m$, si otterrà $y'=(x+h)^m$
e sviluppando per la formola del binomio, si trova

$$y'=x^m+mx^{m-1}h+m\frac{m-1}{2}x^{m-2}h^2$$

$$+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^{m-3}h^3+\text{ ec.}$$

sottraendo da questa l' equazione precedente, e dividendo per h, resta

$$\frac{y'-y}{h}=mx^{m-1}+m.\frac{m-1}{2}x^{m-2}h$$

$$+m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}x^{m-3}h^2+\text{ ecc.}$$

Passando al limite, facendo $h=0$, si otterrà

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}\text{ , dunque } dy=mx^{m-1}dx$$

e rimettendo il valore di y si avrà

$$d.x^m=mx^{m-1}dx.$$

*

21. Se i radicali s' indichino con esponenti fratti, la regola del n.° 21 potrà servire a differenziare le quantità irrazionali. Per esempio, per trovare il differenziale di $\sqrt{z}$, si scriverà $z^{\frac{1}{2}}$, il cui differenziale sarà $\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{dz}{2\sqrt{z}}$, il che c' insegna che *per avere il differenziale della radice quadrata di una quantità variabile, bisogna dividere il differenziale di questa quantità pel doppio del radicale.*

Della differenziazione d' una somma di funzioni.

22. Per differenziare una quantità, che contiene più termini, il processo sarà ben lungo s' egli convien sempre attenersi al metodo finora adoprato, cercando cioè primieramente il valor di y' per dedurne in seguito quello di $\frac{y'-y}{h}$, e poi passare al limite facendo $h=0$. Fortunatamente però allorchè si sa differenziare in particolare ciascun termine, si può seguire un metodo più semplice in virtù d' un teorema così enunciato: *il differenziale d' una somma di funzioni è eguale alla somma de' differenziali di queste funzioni.*

Per dimostrarlo sieno f, F, φ ecc. i segni indicanti queste funzioni diverse, di cui si compone y, e supponiamo che abbiasi

$$y=fx+Fx+\varphi x+\text{ecc.}$$

di cui convien trovare il differenziale.

Se noi mettiamo $x+h$ in luogo di x in queste funzioni, come per ipotesi si sa sviluppare ciascuna in particolare secondo le potenze di h, potremo rappresentare il risultato per

$$\begin{aligned} y'=fx&+Ah+A'h^2+\text{ecc.}\\ +Fx&+Bh+B'h^2+\text{ecc.}\\ +\varphi x&+Ch+C'h^2+\text{ec.}\end{aligned}$$

e riunendo i termini moltiplicati per le stesse potenze di h, e sottraendo y, noi troveremo

$$y'-y=(A+B+C)h+(A'+B'+C')h^2+\text{ecc.};$$

passando al limite, sarà

$$\frac{dy}{dx}=A+B+C, \text{ e } dy=Adx+Bdx+Cdx.$$

A, B, C, essendo i termini moltiplicati per la prima potenza di h ne' sviluppi di $f(x+h)$, di $F(x+h)$, e di $\varphi(x+h)$, ne risulta che $Adx+Bdx+Cdx$ rappresentano la somma de' differenziali delle funzioni proposte.

23. Per dare un' applicazione di questo teorema, supponiamo che si voglia trovare il differenziale di

$$y=ax^3+b^2x^2+e^4\sqrt{x};$$

sappiamo per l' articolo 10, che il differenziale di ax^3 è $ad.x^3$, ed eseguendo, secondo l'articolo 18, la differenziazione indicata, si avrà $a.3x^2dx$, e mettendo fuori il coefficiente numerico, si otterrà $3ax^2dx$. Similmente operando rispetto alla costante b^2, si troverà che il differenziale di b^2x^2 è $2b^2xdx$; e l' articolo 21 ci fa noto che $e^4\sqrt{x}$ ha per differenziale $e^4\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ Sommando dunque questi risultati, troveremo

$$dy=3ax^2dx+2b^2xdx+\frac{e^4dx}{2\sqrt{x}}.$$

24. In generale allorchè in un' espressione che si vuol differenziare, una costante entra come fattore d' una funzione di x, convien' egli differenziare come se la costante non esistesse, e moltiplicare in seguito per questa costante.

25. Se al cantrario una costante non è affetta da una funzione di x, essa non aggiunge, alcun termine al differenziale, come l' abbiam veduto nell' art. 10.

26. Qualche volta la funzione y, e la variabile

x non sono date da una stessa equazione. Per esempio, se si avessero l'equazioni $y=fu$, ed $u=\varphi x$, il primo mezzo, che si presenterebbe, per ottenere il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, sarebbe quello di eliminare u tra queste due equazioni, onde potervi applicare il metodo della differenziazione; ma senza ricorrere a questa operazione preliminare, si può ottenere immediatamente il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, come apparirà dalla seguente dimostrazione.

Supponiamo che nell' equazione $u=\varphi x$ mettasi $x+h$ in luogo di x, e che allora u divenga $u+k$, e che di più sostituendo $u+k$ ad u nell' equazione $y=fu$, la funzione di y divenga y'; se si sviluppino le funzioni di u e di x per rispetto alle potenze de' loro accrescimenti, la sostituzione di $x+h$ in vece di x nella funzione u, ci darà $u'=u+qh+q'h^2+q''h^3+$ ecc.;

E la sostituzione di $u+k$ in luogo di u nella funzione y, ci darà $y'=y+pk+p'k^2+p''k^3$ ecc.; dunque

$$\left.\begin{aligned}\frac{u'-u}{h}&=q+q'h+q''h^2+\text{ecc.}\\ \frac{y'-y}{k}&=p+p'k+p'k^2+\text{ecc.}\end{aligned}\right\}\quad\ldots(10)$$

Moltiplicando queste equazioni termine a termine si avrà

$$\frac{y'-y}{k}\cdot\frac{u'-u}{h}=(p+p'k+p''k^2+\text{ec.})(q+q'h+q''h^2+\text{ecc.})$$

Il primo membro di questa equazione può ridursi; poicchè l'accrescimento di u essendo rappresentato da k, è eguale ad $u'-u$; per conseguenza si avrà

$$\frac{y'-y}{k}\cdot\frac{u'-u}{h}=\frac{y'-y}{h}\cdot\frac{u'-u}{k}=\frac{y'-y}{h}\cdot 1=\frac{y'-y}{h};$$

e mettendo $x'-x$ in luogo di h, l'equazione precedente diverrà

$$\frac{y'-y}{x'-x}=(q+q'h+q''h^2+\text{ec.})(p+p'k+p''k^2+\text{ecc.})\ldots(11).$$

Allorchè h è zero, k parimente svanisce (poichè u non ha acquistato l' accrescimento k, se non perchè x è divenuto $x+h$); per conseguenza nel caso di $h=0$, ch' è quello del limite, l' equazione (11) si cambia in

$$\frac{dy}{dx}=pq\ldots(12)$$

Per determinare p e q, bisogna supporre h e k nulli nell' equazioni (10), e queste daranno

$$\frac{dy}{du}=p,\ \frac{du}{dx}=q.$$

Sostituendo questi valori di p e q nell' equazione (12), si avrà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\ \ldots\ (13)$$

Questo risultamento c' insegna, che se si hanno due equazioni $y=fu$, ed $u=\varphi x$, e che da esse si tirino i valori de' coefficienti differenziali $\frac{dy}{du}$, e $\frac{du}{dx}$, basterà moltiplicare tra di loro questi valori per aver quello di $\frac{dy}{dx}$.

27. Per esempio, se si hanno l' equazioni $y=3u^2$, ed $u=x^3+ax^2$, si troverà

$$\frac{dy}{du}=6u,\frac{du}{dx}=3x^2+2ax;$$

E perciò, moltiplicando quest' equazioni termine a termine si avrà

$$\frac{dy}{dx}=6u(3x^2+2ax)=6(x^3+ax^2)(3x^2+2ax).$$

28. La formola (13) è di grande uso per differenziare espressioni complicate; diamone qualche esempio:

1.° Cerchisi il differenziale di $y=\sqrt{a^2-x^2}$; questa ricerca riducesi a trovare il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$. A tal oggetto, facciamo $a^2-x^2=u$, si avrà $y=\sqrt{u}=u^{\frac{1}{2}}$; e l'equazioni $y=fu$, $u=\varphi x$, art. 24, sono quì rappresentate per $y=u^{\frac{1}{2}}$, $u=a^2-x^2$.

Differenziando quest' equazioni, art. 21, si trova

$$\frac{dy}{du}=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}};\ \frac{du}{dx}=2x;$$

moltiplicando questi coefficienti differenziali, si ha

$$\frac{dy}{dx}=-x(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

Sia ancora $y=(a+bx^m)^n$; per trovare il differenziale, facciamo $(a+bx^m)=u$; avremo l' equazioni $y=u^n, u=a+bx^m$: dunque $\frac{dy}{du}=nu^{n-1}=n(a+bx^m)^{n-1}$; $\frac{du}{dx}=bmx^{m-1}$: moltiplicando tra di loro questi coefficienti differenziali, si avrà

$$\frac{dy}{dx}=bmnx^{m-1}(a+bx^m)^{n-1}.$$

29. Per terzo esempio sia

$$y=\left(a+\sqrt{\left(b-\frac{c}{x^2}\right)}\right)^4$$

Supponiamo $b-\frac{c}{x^2}=u$...(14);

dunque $y=(a+\sqrt{u})^4$....(15).

Differenziando l' equazione (14), avremo

$$\mathrm{d}u=\frac{2cx\mathrm{d}x}{x^4};$$

dunque

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{2cx}{x^4}=\frac{2c}{x^3}:$$

L' equazione (15)

$$\mathrm{d}y=4(a+\sqrt{u})^3\mathrm{d}(a+\sqrt{u})=4(a+\sqrt{u})^3\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}};$$

e mettendo per u il suo valore, si avrà

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{2\left(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{\left(b-\frac{c}{x^2}\right)}};$$

moltiplicando questi coefficienti differenziali, si ha in fine

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{4c}{x^3}\left[a+\sqrt{\left(b-\frac{c}{x^2}\right)^3}\right];}{\sqrt{\left(b-\frac{c}{x}\right)}}$$

Si potrebbe ancora prendere per esempio $y=(a+\sqrt{x})^3$, e si troverebbe

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3(a+\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}.$$

De' differenziali successivi.

30. Sia y una funzione di x, differenziandola, troveremo un risultamento della forma $p\mathrm{d}x$ (p essendo una quantità, che può contenere la variabile x). Se p contiene x, si potrà differenziare anche p, ed avremo un risultamento della forma $q\mathrm{d}x$; operando nello stesso modo per rispetto a q, si troverà un risultamento della forma $r\mathrm{d}x$; perciò $p\mathrm{d}x$, $q\mathrm{d}x$,

$r\mathrm{d}x$ ec. sono differenziali successivi di y. Per esempio, sia $y=ax^3$, si troverà $\mathrm{d}y=3ax^2\mathrm{d}x$; dunque sarà $p=3ax^2$: Differenziando di nuovo, si ha $\mathrm{d}p=6ax\mathrm{d}x$; dunque si avrà $q=6ax$; e differenziando ancora, si avrà $\mathrm{d}q=6a\mathrm{d}x$, e perciò $r=6a$. Ulteriormente non può più aver luogo la differenziazione, poichè $6a$ è una costante.

L' equazioni $\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}p=q\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}q=r\mathrm{d}x$, dividendo per $\mathrm{d}x$, danno rispettivamente

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p,\quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=q,\quad \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}=r.$$

Dopo di aver ottenuto q per mezzo di due differenziazioni successive, dividendo in ogni volta per $\mathrm{d}x$, rappresenteremo questa operazione con $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, ed avremo $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=q$; similmente differenziando di nuovo, e dividendo per $\mathrm{d}x$, avremo $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$; e così in seguito.

$\mathrm{d}y$ è il primo differenziale di y
d^2y n' è il differenziale secondo
d^3y n' è il terzo differenziale; e così in seguito.

Teorema di Maclaurin.

31. Sia y una funzione di x; ordiniamola per rispetto ad x, e supponiamo

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ecc.}\dots\dots(16);$$

differenziando, ed ordinando per x, si troverà

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{ec.}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2C+2.3Dx+3.4Ex^2+\text{ec.}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}=2.3D+2.3.4.Ex+\text{ec.}$$

Rappresentisi con (y) ciocchè divien y, allorchè $x=0$; con $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ciocchè diviene $\frac{d^2y}{dx^2}$, quando $x=0$, e così in appresso; l'equazioni precedenti daranno

$$(y)=A,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)=B,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=2C,\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=2.3D,$$

dalle quali ne dedurremo

$$A=(y),\ B=\left(\frac{dy}{dx}\right),\ C=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ D=\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right);$$

sostituendo questi valori nell'equazione (16), essa diverrà

$$y=(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)x+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{2.3}\right)\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)x^3 \ldots (17):$$

Questa è la formola di Maclaurin.

32. Per prima applicazione, prendiamo $y=\frac{1}{a+x}$ differenziand troveremo

$$dy=\frac{(a+x)d.1-1.d(a+x)}{(a+x)^2}=-\frac{dx}{(a+x^2)},$$

donde avremo $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(a+x)^2}$;

differenziando di nuovo, troveremo successivamente

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(a+x)}{(a+x)^4}=\frac{2}{(a+x)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{2.3(a+x)^2}{(a+x)^6}=\frac{2.3}{(a+x)^4};$$

dunque facendo $x=0$ ne' valori di y, di $\frac{dy}{dx}$ di $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec. troveremo

$$(y)=\frac{1}{a},\ \left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{1}{a^2},\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{2}{a^3},\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=-\frac{2.3}{a^4};$$

sostituendo questi valori nella formula (17), si otterrà $\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+$ ecc.

33. Per seconda applicazione prendiamo

$$y=\sqrt{(a^2+bx)}=(a^2+bx)^{\frac{1}{2}}$$; si avrà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}b(a^2+bx)^{-\frac{1}{2}}=\frac{b}{2\sqrt{(a^2+bx)}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}b^2(a^2+bx)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}b^2}{\sqrt{(a^2+bx)^3}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}b^3(a^2+bx)^{-\frac{5}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}b^3}{\sqrt{(a^2+bx)^5}}.$$

Se noi facciamo $x=0$, questi valori diverranno

$$(y)=(a^2)^{\frac{1}{2}}=a;\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2}\frac{b}{a};\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{1}{2\cdot 2}b^2}{a^3};$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\frac{\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}3b^3}{a^5};$$

Sostituendo nella formula (17) questi valori di (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ecc. si troverà

$$\sqrt{(ca^2+bx)}=a+\frac{bx}{2a}-\frac{b^2x^2}{8a^3}+\frac{b^3x^3}{16a^5}-\text{ecc.}$$

34. Per terzo esempio, prendiamo $y=(a+x)^m$; differenziando troveremo

$$\frac{dy}{dx}=m(a+x)^{m-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)(a+x)^{m-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3};$$

facendo $x=0$ si avrà

$$(y)=a^m;(\frac{dy}{dx})=ma^{m-1};(\frac{d^2y}{dx^2})=m(m-1)a^{m-2};$$

$$(\frac{d^3y}{dx^3}=m(m-1)(m-2)a^{m-3};$$

Sostituendo questi valori di (y), $(\frac{dy}{dx})$, di $(\frac{d^2y}{dx^3})$ecc nell' equazione (17), si trova

$$(a+x)^m=ma^{m-1}x+m(\frac{m-1}{2})a^{m-2}x^2+$$

$$m(\frac{m-1}{2})(\frac{m-2}{3})a^{m-3}x^3+\text{ecc.}$$

Della differenziazione delle quantità trascendenti.

35. Si chiamano quantità trascendenti quelle che sono affette da esponenti variabili, da logaritmi, da seni ecc.

36. Sulle prime proponiamoci di differenziare a^x: Sia dunque $y=a^x$; cambiando x in $x+h$, ed y in y', questa equazione diverrà

$$y'+a^{x+h}, \text{ o piuttoslo } y'=a^x\, a^h:$$

Bisogna dunque sviluppare questa espressione per rispetto alle potenze di h; or affinchè a^b possa svilupparsi per mezzo della formula del binomio, io farò $a=1+b$; per conseguenza a^h diverrà

$$(1+b)^h=1+h\frac{b}{1}+h(h-1)\frac{b^2}{1.2}$$

$$+h(h-2)(h-2)\frac{b^3}{2.3}+\text{ec. } (18).$$

Si ordinerà per rispetto ad h: ma senza effettuare questa operazione, come noi non abbiamo bisogno che de' termini moltiplicati per la prima potenza di h, osserveremo che nel prodotto della forma $h(h-1)(h-)(h-3)$ec.; la parte $(h-1)(h-2)(h-3)$ ecc. è composta di n fattori, il suo sviluppo, dietro la teorica dell' equazioni, sarà della forma $h^n+Ah^{n-1}+Bh^{n-2}....+Mh+N$; il termine N si comporrà dal prodotto de' secondi termini $-1,-2,-3$ ec. de' binomii $h-1$, $h-2$, $h-3$ ecc.; or poicchè $h(h-1)(h-2)(h-3)$, ec. $=h(h^n+Ah^{n-1}....+Mh+N)$, egli è evidente che il termine il quale contiene la prima potenza di h in questo prodotto sarà Nh, o, per ciocchè si è detto quì sopra, $(-1)(-2)(-3)ecc h$, d'onde può conchiudersi, che per trovare nello sviluppo (18) i termini affetti della prima potenza di h, ne' termini complicati di esso, cioè cominciando dal terzo, si formeranno nel seguente modo i differenti coefficienti di h: il coefficiente di h si comporrà dal prodotto de' numeri sottratti da h moltiplicati per $\frac{b^2}{1.2}$ nel terzo termine; per $\frac{b^3}{2.3}$ nel quarto, e così in seguito. Segue da ciò che

$a^b=1+(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{ec.})h+$ termini in h^2+ termini in h^3, ec.

Rappresentiamo $(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{ec.})$ con A: si avrà $a^h=1+A^h+$ termini in h^2+ termini in h^3, ec.; sostituendo questo valore nell' equazione $y'=a^x a^h$, questa diverrà $y'=a^x+Aa^x h+$ termini in h^2+ termini in h^3, ec.;

Se ne togliamo l' equazione primitiva $y=a^x$ si avrà $y'-y=Aa^x h+$ termini in h^2+ termini in h^3, ec.; passando al limite, si avrà

$$\frac{dy}{dx}=Aa_x\text{, cioè }\frac{da^x}{dx}=Aa^x\ ...(19).$$

La costante A dipende da a; poicchè se nell' equazione

$$A=(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\text{ ec. }),$$

si mette per b il suo valore $a-1$ si troverà

$$A=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\text{ecc...}(20).$$

37. Per determinare il valore della costante A, cerchiamo, col teorema di Maclaurin, lo sviluppo di a^x avremo

$$y=a^x$$

$$\frac{dy}{dx}=Aa^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Ada^x}{dx}=A\frac{Aa^xdx}{dx}=A^2a^x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}...=A^3a^x \text{ ec.}$$

Facciamo $x=0$, troveremo $(y)=a^0=1,(\frac{dy}{dx})=A$, $\frac{d^2y}{dx^2}=A^2,(\frac{d^3y}{dx^3})=A^3$ ec. Sostituendo questi valori nell' equazione (17), troveremo

$$a^x=1+\frac{Ax}{1}+\frac{A^2x^2}{1.2.}+\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\text{ ec.};$$

facciamo $x=\frac{1}{A}$; questa equazione diverrà

$$a^{\frac{1}{A}}=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{ ec.};$$

chiamisi e il secondo membro di questa equazione, essa si cambia in $a^{\frac{1}{A}}=e$. dalla quale si ha $a=e^A$; prendendo i logaritmi si ha

$$loga=loge^A=Aloge;\text{ dunque}$$

$$A=\frac{loga}{loge}...(21)$$

Il numero e, il cui valore si ha per mezzo dell'equazione

$$e=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{ ec.}$$

è la base scelta da *Nepero* per calcolare le sue tavole de' logaritmi.

Come la serie $1+1+\frac{1}{1.2}+$ ec. è assai convergente, possiamo limitarci a prenderne i dieci primi termini, ed allora si troverà con molta approssimazione

$$e=2,7182818.$$

Se il logaritmo di a nel sistema *neperiano* rappresentisi con La, si avrà $a=(2,7182818)^{La}$, e più semplicemente $a=e^{La}$; dunque si avrà $loga=$ La $loge$, da cui si ha $La=\frac{loga}{loge}$, ciocchè riduce l'eqnazione (21) ad A$=$La, per cui l'equazione (19) diverrà $\frac{da^x}{dx}=a^x$ ....(22).

De' differenriali logaritmici.

38. Sia x il logaritmo di y nel sistema della base a, si avrà y$=a^x$, e perciò (37) dy$=$Aa^xpx, da cui si ha

$$dx=\frac{dy}{Aa^x}=\frac{dy}{\frac{loga}{loge}a^x}=\frac{dy}{a^x}\cdot\frac{loge}{loga};$$

e come $a^x=$y, ed $x=log$y, l'equazione precedente diverrà $dlogy=\frac{dy}{y}\cdot\frac{loge}{loga}$.

Quando i logaritmi si prendono nel sistema *neperiano* A$=1$, $\frac{loge}{loga}=\frac{loge}{loga}=1$; dunque allora sarà

$$dlogy=\frac{dy}{y}.$$

De' differenziali de' seni, coseni ed altre linee trigonometriche, o de' differenziali delle funzioni circolari.

39. *L'arco è più grande del suo seno, e più piccolo della sua tangente.*

Per dimostrarlo (Fig. 2.) sia AB un arco, che ha BE per seno, e DA per tangente, e prendiamo l'arco AB' eguale ad AB. Considerando la corda BB' come una linea retta, BB' è più corta dell'arco BAB': dunque la retta BE, che è la metà della corda BB' è più corta dell'arco BA metà dell'arco BAB', dal che ne risulta che il seno è minore dell'arco cui appartiene. Per dimostrare che la tangente è maggiore dell'arco, noi abbiamo Fig. 2.

Aja del triangolo DD'C > aja del settore BAB'C, o, mettendo l'espressioni geometriche di queste aje,

$$DD'.\frac{1}{2}AC > \text{arco } BAB'.\frac{1}{2}AC;$$

supprimendo nell'una e l'altra parte il fattore comune $\frac{1}{2}AC$, resterà

$$DD' > \text{arco } BAB',$$

e prendendo la metà, si avrà

$$DA > \text{arco } BA.$$

40. Risulta da ciocchè precede, che il limite del rapporto del seno all'arco è l'unità; poichè allorchè l'arco h rappresentato da AB diviene nullo, il seno, confondendosi colla tangente, a più forte ragione si confonderà coll'arco, ch'è compreso tra la tangente, ed seno medesimo; per conseguenza, nel caso del limite, si ha $\frac{\text{sen}h}{\text{arc}.h} = \frac{\text{sen}h}{h} = 1.$

41. Per trovare il differenziale del seno, il cui arco è x, supponiamo che quest' arco riceva un accrescimento h: or sappiamo dalla tigonometria che

$$\operatorname{sen}(x+h)=\operatorname{sen}x\cos h+\operatorname{sen}h\cos x \ldots (22)$$

quindi sarà

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=\frac{\operatorname{sen}x\cos h+\operatorname{sen}h\cos x-\operatorname{sen}x}{h}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}x(\cos h-1)}{h}+\frac{\operatorname{sen}h\cos x}{h} \ldots (23).$$

Quando h diviene o, $\cos h-1$ diviene ancora nullo, e $\frac{\cos h-1}{h}$ riducesi a $\frac{0}{0}$; converrà perciò di mettere sotto altra forma questo termine: a tal oggetto l' equazione $\operatorname{sen}^2 h+\cos^2 h=1$ da $\cos^2 h-1=-\operatorname{sen}^2 h$, o $(\cos h-1)(\cos h+1)=-\operatorname{sen}^2 h$, da cui si ha $\cos h-1$ $=-\frac{\operatorname{sen}^2 h}{\cos h+1}$; sostituendo questo valore nell'equazione (23), questa diverrà

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}=-\operatorname{sen}x\frac{\operatorname{sen}h}{\cos h+1}\,\frac{\operatorname{sen}h}{h}+\frac{\operatorname{sen}h\cos x}{h} \ldots (24).$$

Nel caso di $h=o$, si ha $\frac{\operatorname{sen}h}{h}=1$, e $\frac{\operatorname{sen}h}{\cos h+1}=\frac{0}{2}=0$; dunque l'equazione (24) si ridurrà a

$$\frac{d\operatorname{sen}x}{dx}=\cos x\text{, d' onde si ha}$$

$$d\operatorname{sen}x=dx\cos x.$$

42. In questa dimostrazione il raggio delle tavole è stato preso per unità; ma se si volesse il differenziale di un seno, allorchè il raggio è a, invece d' impiegare l'equazione (22), si farebbe uso di quest'altra

$$\operatorname{sen}(x+h)=\frac{\operatorname{sen}x\cos h+\operatorname{sen}h\cos x}{a}.$$

Nel caso precedente, bisognerebbe dunque restituire

la costante a, il che darebbe $d\operatorname{sen}x=\frac{dx\cos x}{a}$, pel differenziale del seno di un arco, il cui raggio è a.

** 43. Il differenziale di sen$x$ si può avere dietro considerazioni geometriche; poichè sia AB (Fig. 1) l'arco x, BT l'arco h, la perpendicolare BP sarà sen$x$, e l'altra TQ sen$(x+h)$; ciò posto quanto più l'arco BT$=h$ diminuisce, tanto più l'angolo TBC tende a divenir retto; per conseguenza nel caso del limite, si può considerare l'angolo TBC come retto; allora il triangolo TBD diviene simile all'altro BCP, poichè in questa circostanza questi triangoli hanno i loro lati perpendicolari l'uno all'altro; perciò si avrà la seguente proporzione Fig. 1.

$$\mathrm{BC} : \mathrm{CP}=\mathrm{BT} : \mathrm{TD},$$

o

$$r : \cos x=\mathrm{BT} : \operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x,$$

Da cui si ha

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{\mathrm{BT}}=\frac{\cos x}{r};$$

passando al limite, ed osservando che in questo caso la corda BT$=h$, l'equazione precedente diverrà

$\frac{d\operatorname{sen}x}{dx}=\frac{\cos x}{r}$, e prendendo il raggio$=1$, $d\operatorname{sen}x=dx\cos x$.**

*

44. Per ritrovare il differenziale di $\cos x$, l' equazione $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, differenziata, darà, art. 21 $2\operatorname{sen} x d\operatorname{sen} x + 2\cos x d\cos x = 0$, da cui si ha

$$d\cos x = \frac{-\operatorname{sen} x d\operatorname{sen} x}{\cos x};$$

ponendo per $d\operatorname{sen} x$ il suo valore $dx\cos x$ (41), e riducendo, si avrà

$$d\cos x = -dx\operatorname{sen} x$$

45. Il differenziale di $\operatorname{tang} x$ si ottiene, considerando che $\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$; differenziando questa equazione per l' art. 19, si trova

$$d\operatorname{tang} x = \frac{\cos x d\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x d\cos x}{\cos^2 x};$$

mettendo i valori di $d\operatorname{sen} x$, $d\cos x$, si avrà

$$d\operatorname{tang} x = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{dx}{\cos^2 x}:$$

46. Si sa dalla trigonometria che il raggio è medio proporzionale tra la tangente e la cotangante, e tra il coseno e la segante, ciocchè da

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{tang} x}, \quad \operatorname{seg} x = \frac{1}{\cos x}:$$

differenziando la prima di quest'equazioni, (art. 19), si ha

$$d\cot x = -\frac{d\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang}^2 x} = -\frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{tang}^2 x} = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x};$$

poichè dall' equazione $\frac{\operatorname{sen}}{\cos} = \operatorname{tang}$ si ottiene $\operatorname{sen} = \cos.\operatorname{tang}$.

47. L' equazione $\text{seg}x = \frac{1}{\cos x}$ differenziata da

$$d\text{seg}x = -\frac{d\cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx\,\text{sen}x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx = \text{tang}x\,\text{seg}x\,dx.$$

48. Nello stesso modo si determinerebbe il differenziale della cosegante; poichè $\text{coseg}x = \frac{1}{\text{sen}x}$; differenziando si avrà

$$d\text{coseg}x = -\frac{\cos x\,dx}{\text{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\text{sen}x} \cdot \frac{1}{\text{sen}x} dx = \cot x\,\text{coseg}x\,dx.$$

49. Per riguardo al seno verso, differenziando l' equazione $\text{senv}.x = 1 - \cos x$, si avrà $d\,\text{senv}x = \text{sen}x\,dx$.

Della differenziazione di alcune funzioni trascendenti complicate.

50. I principii precedenti basterebbero per poter differenziare ogni espressione affetta da quantità trascendenti.

Sia $y = a^{b^x}$; facciamo $b^x = u$, avremo $y = a^u$; differenziando per l' art. (35), si avrà

$$\frac{dy}{du} = a^u La = a^{b^x} La, \quad \frac{du}{dx} = b^x Lb;$$

Dunque (art. 24.) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = a^{b^x} b^x La Lb.$

51. Sia ancora $y = z^v$; prendendo i logaritmi si ha $\log y = v \log z$; dunque sarà

$$d\log y = v\,d\log z + \log z\,dv;$$

mettendo in luogo de' differenziali logaritmici i di loro valori (art. 38), troveremo

$$\frac{dy}{y}=v\frac{dz}{z}+\log z dv \text{ , e perciò}$$

$$dy=y\left(v\frac{dz}{z}+\log z dv\right)=z^v\left(v\frac{dz}{z}+\log z dv\right).$$

Per mezzo di questo differenziale, si troverà facilmente quello di $y=z^{t^u}$; poicchè se si fa $t^u=v$, l'equazione riducesi ad $y=z^v$; or l'equazioni $y=z^v$, e $v=t^u$ che hanno la stessa forma dell'equazione, di cui abbiamo trovato il differenziale, daranno

$$dy=z^v\left(v\frac{dz}{z}+\log z dv\right)$$

$$dv=t^u\left(u\frac{dt}{t}+\log t du\right)$$

Sostituendo il valore di v, e di dv in quello di dy, avremo

$$dy=z^{t^u}\left[t^u\frac{dz}{z}+\log z\, t^u\left(u\frac{dt}{t}+\log t du\right)\right]=$$

$$z^{t^u}t^u\left(\frac{dz}{z}+u\log z\frac{dt}{t}+\log z\log t du\right).$$

TEOREMA DI TAYLOR.

52. Prima d'innoltrarci di vantaggio, osserveremo, che nel calcolo differenziale un'espressione della forma $\frac{dy}{dx}$ significa che una fun zione y di una o più variabili è stata

differenziata per rispetto alla variabile x, e divisa per dx: Per esempio, se si avesse $y=ax^2u^3z^4$, l'espressione $\frac{dy}{dx}$ si troverebbe, riguardando u, e z come costanti, e differenziando per rispetto ad x, e dividendo in seguito per dx; sicchè si avrebbe $\frac{dy}{dx}=2axu^3z^4$.

Nello stesso modo si troverà $\frac{dy}{dz}=4ax^2z^3u^3$, e $\frac{dy}{du}=3ax^2u^2z^4$. Se fosse $y=x^2+z^2$, sarebbe $\frac{dy}{dx}=2x$.

53. *Se in una funzione* y *di* x, *la variabile* x *si cambii in* x+h, *si ha lo stesso coefficiente differenziale, o che* x *è variabile ed* h *costante, o che* h *è variabile ed* x *costante.*

Per dimostrarlo se nell' equazione $y=fx$ mettasi $x+h=x'$ in luogo di x si avrà $y'=fx'$; il differenziale di fx' sarà eguale a un' altra funzione di x rappresentata per $\varphi x'$ e moltiplicata per dx', per conseguenza $dy'=\varphi x'dx'$, o mettendo per x' il suo valore $x+h$ si avrà

$$dy'=\varphi(x+h)d(x+h).$$

Or il solo cambiamento, che questo differenziale subisce, dietro l' ipotesi di x variabile, ed h cocostante, non ha luogo che nel fattore $d(x+h)$, il quale riducesi a dx: allora dunque si avrà

$$dy'=\varphi(x+h)dx,$$

da cui si ha

$$\frac{dy'}{dx}=\varphi(x+h)\ldots\ldots(26).$$

Se al contrario si fa x costante ed h variabile, l' espressione $d(x+h)$ riducesi a dh, si avrà

$$dy'=\varphi(x+h)dh,$$

e perciò

$$\frac{dy'}{dh}=\varphi(x+h).....(27)$$

eguagliando questi due valori di $\varphi(x+h)$, sarà

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dh}.$$

Per esempio se si avesse $y=ax^3$, mettendo $x+h$ in luogo di x, si troverebbe

$$\frac{dy'}{dx}=3a(x+h)^2=\frac{dy'}{dh}.$$

54. Differenziando l' equazioni (26) e (27) per rispetto ad $x+h$, si hanno ancora de' risultamenti eguali

$$\frac{d^2y'}{dx}=\varphi'(x+h)d(x+h)$$

$$\frac{d^2y'}{dh}=\varphi'(x+h)d(x+h):$$

Facciamo h costante nella prima equazione, ed x nella seconda, si avrà

$$\frac{d^2y'}{dx}=\varphi'(x+h)dx, \frac{d^2y'}{dh}=\varphi'(x+h)dh;$$

d' onde se ne dedurrà

$$\frac{d^2y'}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dh^2}.$$

Collo stesso raziocinio si conchiuderà

$$\frac{d^3y'}{dx^3}=\frac{d^3y'}{dh^3}\ ,\quad \frac{d^4y'}{dx^4}=\frac{d^4y'}{dh^4}$$

e così in seguito

55. Ciò posto sia y' una funzione di $(x+h)$; sviluppandola per rispetto alle potenze di h, supponiamo che si abbia

$$y'=y+Ak+Bk^2+Ch^3+\text{ec.} \ \ldots\ (24),$$

A, B, C ecc., essendo delle funzioni ignote di x, che si tratta di determinare. A tal oggetto, differenziando per rispetto ad h, e dividendo per dh, si avrà

$$\frac{dy'}{dh}=A+2Bh+3Ch^2+\text{ec.};$$

differenziando in seguito per rispetto ad x, e dividendo per dx, si avrà

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{dy}{dx}+h\frac{dA}{dx}+h^2\frac{dB}{dx}+\text{ecc.}$$

E poicchè i primi membri di queste due equazioni sono eguali, per l'art 53., tali saranno ancora i secondi; eguagliando dunque tra loro i coefficienti delle stesse potenze di h si troverà

$$A=\frac{dy}{dx}\ ,\quad B=\frac{dA}{2dx}\ ,\quad C=\frac{dB}{3dx}\ ,\quad D=\frac{dC}{4dx}\ \text{ecc.}$$

Sostituendo il valore di A in quella di B, e così successivamente, si avrà

$$B=\frac{d^2y}{2.dx^2}\ ,\quad C=\frac{d^3y}{2.3.dx^3}\ ,\quad D=\frac{d^4y}{2.3.4.dx^4}\ \text{ec.}$$

Per mezzo di questi valori di A, B, C ec. l'equazione (24) diverrà

$$y'=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{1.2.dx^2}h^2+\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}h^3\text{, ec.,}$$ e mettendo per y' il suo valore

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3..}\text{ ecc.}$$

Ed è questa la formula di Taylor

Applicazione della formola di Taylor allo sviluppo in serie di diverse funzioni

56. Sia $y'=\sqrt{x+h}$; sarà $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$; dunque sarà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^5}},$$

Sostituendo nella formola di Taylor, si avrà

$$\sqrt{x+h}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{x}}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{16}\frac{h^3}{\sqrt{x^5}}\text{,ec.}$$

57. Sia $y'=\text{sen}(x+h)$, d' onde segue che $y=\text{sen}x$; si avrà

$$\frac{dy}{dx}=\cos x,\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\text{sen}x,\ \frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x,\ \frac{d^4y}{dx^4}=\text{sen}x\text{, ec.;}$$

sostituendo nella formola di Taylor, si trova

$$\text{sen}(x+h)=\text{sen}x+\cos x\frac{h}{1}-\text{sen}x\frac{h^2}{1.2}-\cos x\frac{h^3}{1.3}$$

$$+\operatorname{sen}x\frac{h^4}{2.3.4}+\cos x\frac{h^5}{2.3.4.5}\ \text{ecc};$$

Facendo $x=o$, si avrà sen$x=o$, e cos$x=1$, e questo sviluppo riducesi a

$$\operatorname{sen}h=h-\frac{h^3}{1.3}+\frac{h^5}{2.3.4.5}-\frac{h^7}{1....7}\ \text{ecc.}$$

Se si prendesse $y'=\cos(x+h)$, operando come nell' esempio precedente, si troverebbe

$$\cos h=1-\frac{h^2}{1.2}+\frac{h^4}{1.2.3.4}-\ \text{ecc.}$$

58. Cerchiamo ancora lo sviluppo di $\log(x+h)$, avremo

$$y'=\log(x+h)\ \text{e perciò}\ y=\log x,$$

$$dy=\frac{dx}{x},\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x};$$ e per mezzo delle successive

differenziazioni, si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2},\ \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{x^3}\ \text{ecc.};$$

Sostituendo questi valori nella formola di Taylor, avremo

$$\log(x+h)=\log x+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}\ \text{ecc.}$$

59. Si potrebbe facilmente, per mezzo di questa formula, trovare il differenziale di un logaritmo, se essa fosse nota per isviluppo algebrico: infatti questa formola da

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{x}-\frac{h}{2x^2}+\ \text{ecc.};$$

passando al limite, si avrà

$$\frac{\mathrm{d}\log x}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x},\ \text{e}\ \mathrm{d}\log x=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Conoscendo il differenziale di un logaritmo, sarebbe facile trovare quello di a^x; poicchè facendo $y=a^x$, e prendendo i logaritmi nel sistema neperiano, si ha

$$\mathrm{L}y=\mathrm{L}a^x=x\mathrm{L}a;$$

e differenziando

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=dx\mathrm{L}a,$$

d' onde si ha

$$\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x\mathrm{L}a,\ a^x dx\mathrm{L}a.$$

60. Si può dedurre il teorema di Maclaurin da quello di Taylor nel seguente modo:

Si ha pel teorema di Taylor

$$f(x+h)=fx+\frac{\mathrm{d}.fx}{\mathrm{d}x}\frac{h}{1}+\frac{\mathrm{d}^2fx}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}$$

$$+\frac{\mathrm{d}^3fx}{\mathrm{d}x^3}\cdot\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ecc. (25).}$$

S' indichino con (fx), $(\frac{\mathrm{d}fx}{dx})$, $(\frac{\mathrm{d}^2fx}{\mathrm{d}x^2})$ ecc. ciocchè diviene fx, $\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$ ecc. quando in esse si fa $x=o$;

la formola (25), quando in essa si farà $x=o$, diverrà

$$fh=(fx)+(\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x})h+(\frac{\mathrm{d}^2fx}{\mathrm{d}x^2})\frac{h^2}{1.2.}+\text{ec.}$$

In questa equazione h entra in fh, come x entrava in fx, in guisa che se si cambia h in x, fh diverrà fx; facendo dunque questo cambiamento, si trova

$$fx=(fx)+\left(\frac{dfx}{dx}\right)x+\left(\frac{d^2fx}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2}+ecc.... (26)$$

ch' è il teorema di Maclaurin.

Della differenziazione dell' equazioni a due variabili.

61. Sia $F(x,y)=o$ ... (27), una equazione tra due variabili. Risolvendo questa equazione per rispetto ad y, si troverà $y=\varphi x$; imaginiamo che questo valore sia stato sostituito nell' equazione (27), questa diverrà $F(x,\varphi x)=o$, o per maggior semplicità

$$fx=o \;...\; (28),$$

equazione identica, nella quale tutt' i termini debbono distruggersi, qualunque valore diesi ad x. Per esempio, se questa equazione non monta che al terzo grado, si potrà rappresentarla con

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=o,$$

e mettendo per x un valore qualunque, essa sarà sempre soddisfatta; dunque mettendo $x+h$ in luogo di x, si avrà

$$A(x+h)^3+B(x+h)^2+C(x+h)+D=o;$$

cioè se si ha $fx=o$, qualunque sia x, si avrà parimente $f(x+h)=o$, e togliendo da questa la prima, sarà $f(x+h)-fx=o$;
dunque sarà

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=o$$

Ora $f(x+h)=fx+Ah+Bh^2+$ ecc.
da cui si ha

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=A+Bh+\text{ec.};$$

il primo membro di questa equazione essendo zero, si avrà parimente

$$A+Bh+\text{ec.}=o;$$

e passando al limite, $\frac{dfx}{dx}=A=o$, e perciò $dfx=$

$Adx=o$, o piuttosto, rimettendo y, $dF(x,y)=Adx=o$.

Ciò c' insegna, che riguardando y, come una funzione di x, se si differenzia l' equazione $F(x,y)=o$, il risultamento potrà mettersi eguale a zero, il che servirà a determinare il valore del coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, come lo vedremo nell' esempio seguente.

Sia dunque $F(x,y)=x^2+3ay-y^2=o$ ... (29): differenziando co' metodi ordinarii, ed osservando che il risultamento dee eguagliarsi a zero per la dimostrazione precedente, si ha

$$2xdx+3ady-2ydy=o \; ... \; (30);$$

da questa equazione si ottiene

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2y-3a} \; .... \; (31).$$

62. Se si paragona l' andamento che ci ha fatto ottenere questo valore con quello che abbiamo finora impiegato, si vedrà che, servendoci di questo primo metodo, sarebbe stato uopo di mettere sulle prime l' equazione (27) sotto la forma $y=fx$, e per conse-

guenza di sciogliere l'equazione per rispetto ad y, per dedurne inseguito il valore di $\frac{dy}{dx}$ mercè la differenziazione. Secondo questo metodo troveremmo sulle prime

$$y=\frac{3a}{2}+\sqrt{(\frac{9}{4}a^2+x^2)},$$

ed in seguito, per mezzo della differenziazione

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x}{(\sqrt{\frac{9}{4}a^2+x^2})}$$

Questo valore di $\frac{dy}{dx}$ si presenta sotto una forma differente di quello che ci offre l'equazione (31); ma mettendo il valore di y nell' equazione (31), essa diverrà

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{2x}{2(\sqrt{\frac{9}{4}a^2+x^2})}=\pm\frac{x}{(\sqrt{\frac{9}{2}a^2+x^2})},$$

come abbiamo trovato. L'equazione (30) è il primo differenziale dell' equazione (29). Per ottener l'equazione, che dà il coefficiente differenziale di second' ordine, cioè $\frac{d^2y}{dx^2}$, dividendo l'equazione (30) per dx, e facendo $\frac{dy}{dx}=p$, questa equazione diverrà

$$2x+3ap-2yp=o;$$

riguardando y e p come funzioni di x, differenziando avremo

$$2dx+3adp-2ydp-2pdy=0\ ;$$

dividendo per dx e mettendo p in luogo di $\frac{dy}{dx}$, si avrà

$$2+3a\frac{dp}{dx}-2y\frac{dp}{dx}-2p^2=0\ ,$$

d' onde otterremo

$$\frac{dp}{dx}=\frac{2p^2-2}{3a-2y}\ \ldots\ (32)\ ;$$

Or poicchè $p=\frac{dy}{dx}$, avremo $\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$; mettendo questi valori nell' equazione (32), e liberando da fratti, ne verrà

$$d^2y(3a-2y)=2dy^2-2dx^2\ \ldots\ (33):$$

tale sarà il secondo differenziale dell' equazione (29).

Per avere il terzo differenziale, si farà $\frac{dp}{dx}=q$, e l' equazione (32) diverrà, dopo aver fatto svanire il denominatore

$$3aq-2yq=2p^2-2\ ;$$

Si differenzierà riguardando y, p, q, come funzioni di x, e si troverà il terzo differenziale, e così in seguito.

63. Invece d' impiegare le lettere p, q, r ecc. per fare le operazioni, si perverrebbe allo stesso risultamento, differenziando l' equazione (30), e mettendo dy pel differenziale di y, d^2y per quello di dy, d^3y per quello di d^2y ecc. e riguardando dx come costante; in questo modo si troverebbe

$$2dx^2+3ad^2y-2dy^2-2yd^2y=0$$

equazione identica all' altra (33).

64. Diamo ora l'espressione generale del differenziale dell'equazione $f(x,y)=0$. A tal oggetto rappresentisi $f(x,y)$ con u; differenziando questa equazione per rispetto ad x, avremo il termine $\frac{du}{dx}dx$, e differenziandola per rispetto ad y, avremo un secondo termine $\frac{du}{dy}dy$; e si avrà $df(x,y)$, o $du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$. Ma se y si consideri come una funzione di x, differenziandola avremo

$$dy=\frac{dy}{dx}dx;$$

sostituendo questo valore, si avrà

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}dx.$$

65. Applicando qui la verità del teorema art. (24), si vedrà che, considerata u come una funzione di y, ed y di x, il prodotto $\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}dx$ non è altro che il differenziale di u preso per rispetto ad x racchiuso in y.

66. L'intero differenziale di una funzione di x ed y essendo dato per mezzo dell'equazione $du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$, l'espressioni $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$ hanno ricevuto il nome di differenziali parziali di u.

Similmente se u è una funzione di tre variabili x, y, z indipendenti, avremo

$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$, ed i termini $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$ saranno i differenziali parziali di u.

67. Abbiamo veduto (art. 52) che una espressione della forma $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, indicava che la funzione y era stata differenziata per rispetto ad x : Segue da ciò, che se si ha l' equazione $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{A}$, e che se ne tiri

$$1 = \frac{\mathrm{A}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}},$$

non si può conchiudere senza dimostrazione, che $1 = \mathrm{A}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, poicchè in questa nuova equazione il differenziale non è preso per rispetto ad x, ma ad y, e non si sa se in questa nuova ipotesi di differenziazione, il risultamento sia lo stesso. Per togliere questa difficoltà, si è dimostrato (art. 24) che

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

Se in questa equazione si fa $\varphi = x$, essa diverrà

$$1 = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

da cui si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}},$$

ciocchè fa vedere che il cambiamento d' ipotesi di differenziazione si accorda coll' algebra.

** 68. Ecco come potrebbe dimostrarsi direttamente, che col valore di convenzione, che il segno della divisione dà al fratto $\frac{dx}{dy}$, abbia luogo la seguente equazione

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Sia

$$\frac{y'-y}{x'-x}=A+Bh+Ch^2+\text{ec.};$$

si avrà

$$\frac{x'-x}{y'-y}=\frac{1}{A+Bh+Ch^2+\text{ec.}}$$

Facendo la divisione, o sviluppando mercè il teorema di Maclaurin, si avrà

$$\frac{x'-x}{y'-y}=\frac{1}{A}-\frac{B}{A}h+\text{ec.};$$

Passando al limite si ha

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{A},$$

e poichè si ha

$$\frac{dy}{dx}=A,$$

ne segue che sarà

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Del metodo delle tangenti.

Fig. 3. 69. Chiamasi metodo delle tangenti quello che dà l'espressioni differenziali delle tangenti, sottangenti e normali e sonnormali. Siano (Fig. 3) x, y le coordinate del punto M, preso sopra una curva: aumentiamo l'ascissa AP$=x$ di una quantità PP'$=h$; tirisi l'ordinata P'M', e pe' punti MM' facciamo passare una segante M'S. E' chiaro che quanto più diminuirà PP', tanto più PS tenderà a confondersi colla sottangente PT, finchè alla fine PP' $= h$ divenga zero; dunque PT sarà il limite, verso il quale tende PS.

Cerchiamo ora l'espressione analitica di PS, per prenderne il limite: i triangoli simili M'MQ, MSP danno la proporzione

$$\mathrm{M'Q} : \mathrm{QM} = \mathrm{MP} : \mathrm{PS}, \text{ o}$$

$$\mathrm{M'Q} : h = y : \mathrm{PS};$$

dunque sarà

$$\mathrm{PS} = \frac{hy}{\mathrm{M'Q}}:$$

Per determinare M'Q, si ha

$$\mathrm{M'Q} = \mathrm{M'P'} - \mathrm{MP};$$

or $\mathrm{M'P'} = y' = f(x+h) = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \text{ec.}$

ed MP$=y$; sicchè si avrà

$$\mathrm{M'Q} = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \text{ec.}:$$

sostituendo questo valore in quello di PS, si avrà

$$\mathrm{PS} = \frac{hy}{\frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \text{ec.}} = \frac{y}{\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h}{1.2} + \text{ec.}}$$

Al limite $h=0$, PS si cambia in PT, ciocchè da Fig. 3

$$PT=\frac{y}{\frac{dy}{dx}}=\frac{ydx}{dy} \text{ (art. 67) }= \textit{sottangente}$$

70. Se dal punto M si tiri una perpendicolare MN sopra di MT, la sunnormale sarà PN.

Per determinarla avremo

$$PT : PM = PM : PN, \text{ o}$$

$$\frac{ydx}{dy} : y = y : PN;$$

dunque sarà $PN=y\frac{dy}{dx}=$ *sunnormale*.

Per rispetto alla tangente, ed alla normale si ha

$$MT=\sqrt{(\overline{PT}^2+\overline{PM}^2)}, \text{ ed } MN=\sqrt{(\overline{PN}^2+\overline{PM}^2)}$$

cioè

$$tang=\sqrt{\left(y^2\frac{dx^2}{dy^2}+y^2\right)}=y\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2}+1\right)} \text{ e}$$

$$norm=\sqrt{\left(y^2\frac{dy^2}{dx^2}+y^2\right)}=y\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)}.$$

71. Per trovare l'equazione della tangente, siano x', y' le coordinate al punto di contatto:

L'equazione della retta MT, che passa pel punto di contatto, potrà esser rappresentata da

$$y-y'=A(x-x').$$

A essendo la tangente dell'angolo MTP, sarà

$$A=\frac{PM}{PT}=\frac{y'}{\text{sottang}}=\frac{y'}{\frac{y'dx'}{dy'}}=\frac{dy'}{dx'}.$$

Fig 3. per cui l'equazione della tangente diverrà

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')\text{, } \textit{equazione della tangente.}$$

Dunque quella della normale sarà

$$y-y'=-\frac{dx'}{dy'}(x-x').$$

Applicazione delle Formole precedenti a degli esempii.

72. 1°. *Trovare la sottangente della parabola.*
L'equazione della parabola essendo $y^2=px$, differenziandola si avrà, $2ydy=pdx$, e perciò

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{p}\ ;$$

sostituendo questo valore in quello di PT, si ha

$$\text{sottang}=\frac{2y^2}{p}=\frac{2px}{p}=2x\ .$$

2°. *Trovare la sunnormale dell' ellisse.*
L'equazione $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ dell' ellisse rapportata al centro come origine, essendo differenziata, da

$$2a^2ydy+2b^2xdx=0\ ,$$

da cui si ha

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\ ;$$

mettendo questo valore in quello di PN, si avrà

$$\text{sonnormale}=-\frac{b^2}{a^2}x$$

3°. *Trovare l' espressione della tangente al cerchio.* Fig. 3.
L' equazione $x^2+y^2=r^2$, ch' è quella del cerchio, essendo differenziata, da

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x};$$

Per mezzo di questo valore l' espressione di MT riducesi a

$$\text{tang}=y\sqrt{\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)}=y\sqrt{\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right)}=y\sqrt{\frac{r^2}{x^2}}=\frac{ry}{x}.$$

Degli asintoti delle curve.

** 73. L' espressione AT (Fig. 4) della distanza del vertice della curva dal punto d' incontro della tangente coll' asse delle ascisse, deducesi facilmente dall' equazione della tangente; poicchè se il vertice A della curva si prende per origine, la retta AT sarà la distanza di questo vertice dal punto in cui l' ordinata diviene zero. Fig. 4.

E poicchè l' equazione della tangente MT è

$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x')$, basterà di fare in questa equazione $y=0$, affinchè il valore di x, che se ne deduce, sia quello di AT: in questa maniera si otterrà

$$AT=x'-y'\frac{dx'}{dy'}.$$

Per conoscere la distanza dell' origine dal punto, in cui la tangente incontra l' asse delle y, bisognerà trovare l' ordinata che corrisponde ad $x=0$ nell' equazione della tangente, ed avremo

$$AB=y'-\frac{dy'}{dx'}x'.$$

Fig. 4. Supponiamo ora che x' divenendo infinito, AT ed AB conservino valori finiti; se ne concluderà che la retta TB non incontrerà la curva AI che ad una distanza infinita: dunque TBM sarà un asintoto di questa curva.

74. Prendiamo per esempio l'equazione $y^2 = mx + nx^2$; differenziando si avrà

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{m + 2nx'}{2y'};$$

dunque

$$AT = x' - \frac{2y'^2}{m + 2nx'} = \frac{mx' + 2nx'^2 - 2y'^2}{m + 2nx'}$$

$$= -\frac{mx'}{m + 2nx'} = -\frac{m}{\frac{m}{x'} + 2n}$$

$$AB = y' - \frac{mx' + 2nx'^2}{2y'} = \frac{2y'^2 - mx' - 2nx'^2}{2y'}$$

$$= \frac{mx'}{2\sqrt{(mx' + nx'^2)}} = \frac{m}{2\sqrt{(\frac{m}{x'} + n)}}$$

Allorchè si fa $x' = \infty$, questi valori si riducono ad

$$AT = -\frac{m}{2n}, \quad AB = \frac{m}{2\sqrt{n}}; \ldots (34);$$

Dunque la curva sarà suscettibile di asintoti, purchè però n non sia nè negativo, nè zero; poichè nel primo caso il valore di AB diverrebbe imaginario, infatti se n è negativo, l' equazione appartiene ad un' ellisse, ch' essendo curva chiusa, non può avere rami infiniti: nel secondo caso poi i valori di AT e di AB diverrebbero infiniti. e poichè, allorchè $n = 0$, l' equazione nostra è quella della parabola, ne segue che la parabola non può avere asintoti.

Dell' equazione del piano tangente ad una superficie curva, e di quella della normale a questa superficie. Fig. 5.

** 74. Siano $f(x,y,z)=0$ l' equazione di una superficie curva, ed $Ax+By+Cz+D=0$ quella di un piano. Se il punto di contatto M ha per coordinate x', y', z', queste dovranno soddisfare all' equazione del piano, e per conseguenza si avrà

$$Ax'+By'+Cz'+D=0:$$

Eliminando D tra questa equazione, e la precedente, il piano che passa pel punto x', y', z' avrà per equazione

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z'))=0 \ldots (35).$$

Facciasi passare pel punto di contatto x', y', z' un piano parallelo a quello delle x, z; questo taglierà la superficie secondo una curva MC, el piano tangente secondo una retta ML, la quale dovrà esser tangente alla curva MC; altrimenti il piano tangente taglierebbe la superficie curva.

L' equazione della retta ML può dedursi dall' altra (35), poichè essendo LM l' intersezione del piano tangente con un piano parallelo a quello della x, z, in tutt' i suoi punti ha de' valori eguali per y, e come il punto M è sopra di questa retta, si ha $y=y'$, o $y-y'=0$: quindi l' equazione (35) riducesi ad

$$A(x-x')+C(z-z')=0.$$

Questa equazione esprimerà dunque la relazione ch'esiste tra le coordinate z ed x di un punto qualunque preso sulla retta ML, e per conseguenza sarà l' equazione di questa retta. Si metta sotto la forma

$$z-z'=-\frac{A}{C}(x-x'). \ldots (36).$$

Da un' altra parte l' equazione della curva MC si otterrà ancora, riguardando y come costante nell' equazione della superficie curva $f(x,y,z)=0$.

Fig. [illegible] Se si vuole ora esprimere la condizione che la retta ML sia tangente alla curva MC, bisogna che il coefficiente di $x-x'$ dell' equazione (36) sia eguale a $\frac{dz'}{dx'}$, (7[illegible]), che può aversi dall' equazione della curva MC.

Or l' equazione di questa curva, essendo quella stessa della superficie, in cui siasi supposto y costante, basterà di differenziare l' equazione di questa superficie, e tirarne $\frac{dz}{dx'}$ poicchè la notazione $\frac{dz}{dx}$ (art.52) suppone che y si riguarda come costante nella differenziazione

Segue da ciò, che per essere ML tangente di MC, bisogna che sia

$$-\frac{A}{C}=\frac{dz'}{dx'},$$

da cui si ha

$$A=-C\,\frac{dz'}{dx'}\;\ldots(37).$$

In seguito se per M si meni un piano paralello all' altro delle z, y, questo taglierà la superficie secondo una curva MD, el piano tangente secondo una retta MN.

Si dimosterà come quì sopra che questa retta MN debba esser tangente alla curva d' intersezione MD, e che per tutt' i punti di essa le ascisse sono eguali; si ha perciò $x-x'=0$, ciocchè riduce l' equazione (35) a

$B(y-y')+C(z-z')=0$, da cui si ha

$$z-z'=-\frac{B}{C}(y-y').$$

Questa equazione essendo quella della retta MN, si esprimerà questa condizione facendo $-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}$,

da cui si ha $\mathrm{B}=-\mathrm{C}\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}$ ... (38).

Se nell' equazione (35) si sostituiscano i valori di A, e B dati dall' equazioni (37), e (38), riducendo, si avrà per l' equazione del piano tangente

$$z-z'=\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}x'}(x-x')+\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}y'}(y-y') \ \dots\ (39).$$

76. Cerchiamo per esempio l' equazione di un piano tangente alla sfera. Le coordinate del suo centro essendo a, b, c, la sfera avrà per equazione

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2;$$

Differenziando si ha

$$(x-a)\mathrm{d}x+(y-b)\mathrm{d}y+(z-c)\mathrm{d}z=0,$$

da cui si deduce, dietro la notazione espressa (art. 52),

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{a-x}{z-c}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{b-y}{z-c}.$$

Dunque l' equazione del piano tangente alla sfera al punto, in cui le coordinate sono x', y', z', sarà

$$z-z'=\frac{a-x'}{z'-c}(x-x')+\frac{b-y'}{z'-c}(y-y').$$

77. Se questo piano passasse per l' estremità del diametro verticale, si avrebbe $x'=0$, $y'=0$, $z'=c+r$.

Questi valori ridurrebbero l' equazione del piano tangente a $z=z'=c+r$, ch' è l' equazione del piano paralello a quello delle x, y.

78. L' equazioni della normale al punto x', y', z' possono dedursi facilmente dall' equazione del piano tangente. Infatti si sa (vedi la mia *Teoria delle*

curve di secondo ordine) che se si hanno l'equazioni

$$Ax+By+Cz+D=0 \;\ldots\; (40),$$

$$\left.\begin{aligned} x &= az+\alpha \\ y &= bz+\beta \end{aligned}\right) \;\ldots\ldots\; (41),$$

la prima appartenente ad un piano, e le altre ad una retta, le condizioni necessarie, affinchè questa retta sia perpendicolare al piano sono

$$A=aC\,,\;\; B=bC\,.$$

Se si paragona l'equazione (39) del piano tangente all' altra (40), eguagliando tra loro rispettivamente i coefficienti di x, di y, e di z, si troverà

$$A=-\frac{dz'}{dx'}\,,\;\; B=-\frac{dz'}{dy'}\,,\;\; C=1\,;$$

dunque sarà

$$a=-\frac{dz'}{dx'}\,,\;\; b=-\frac{dz'}{dy'}\,;$$

sostituendo questi valori nell' equazioni (41), si ha

$$x=-\frac{dz'}{dx'}\,z+\alpha\,,\;\; y=-\frac{dz'}{dy'}\,z+\beta\,;$$

E poichè il punto x', y', z' dee soddisfare a queste equazioni, si ha ancora

$$x'=-\frac{dz'}{dx'}\,z'+\alpha\,,\;\; y'=-\frac{dz'}{dy'}\,z'+\beta\,:$$

eliminando α e β fra queste ultime quattro equazioni, si troverà per l' equazioni della normale al punto x', y', z'

$$x'-x'=-\frac{dz'}{dx'}(z-z')\,,\;\; y-y'=-\frac{dz'}{dy'}(z-z')\,.$$

Delle funzioni, che divengono $\frac{0}{0}$ per un dato valore della variabile.

79. Allorchè una funzione $\frac{Fx}{\varphi x}$ diviene $\frac{0}{0}$ per avervi sostituito un valore di x, che rappresenterò con a, ciò indica che i due termini della frazione hanno per fattore di comune $x-a$, o, in generale, $(x-a)^m$: se questo fattore comune potesse farsi svanire ne' due termini, si avrebbe il vero valore della frazione.

Supponiamo dunque che $x-a$ sia m volta fattore in Fx, ed n volta in φx (salvo a supporre, se il caso l'esige, che m ed n siano amendue eguali all' unità o a zero); si potrà fare

$$Fx = P(x-a)^m, \quad \varphi x = Q(x-a)^n.$$

Per mezzo della differenziazione si troverà

$$\frac{dFx}{dx} = \frac{dP}{dx}(x-a)^m + mP(x-a)^{m-1}.$$

Osserviamo che questo valore di $\frac{dFx}{dx}$ si compone di due termini, uno de' quali contiene una potenza di $x-a$ minore dell' unità di quella ch' entra nella funzione. Per la stessa ragione, prendendo il coefficiente differenziale di $\frac{dFx}{dx}$, si troverà un termine affetto da $(x-a)^m$, un altro da $(x-a)^{m-1}$, ed un terzo da $(x-a)^{m-2}$; quest' ultimo sarà $m(m-1)P(x-a)^{m-2}$. Continuando nello stesso modo, si vedrà che ogni nuova differenziazione riproduce de' termini affetti dalle stesse potenze di $(x-a)$, più un termine, nel quale la potenza di $x-a$ è diminuita di una unità: Perciò, prendendo i coefficienti differenziali successivi, il termine che contiene la meno alta potenza di $x-a$, sarà

dopo la prima differenziazione $mP(x-a)^{m-1}$

dopo la seconda . . . . . $m(m-1)P(x-a)^{m-2}$

dopo la terza . . . . $m(m-1)(m-2)P(x-a)^{m-3}$

dopo la pn.^{ma} . . . . $m(m-1)\ldots\ldots P(x-a)^{m-n}$

Di maniera che il coefficiente differenziale di Fx dell' ordine r, sarà di questa forma

$$\frac{d^rFx}{dx^r}=\chi(x-a)+{}^m\chi'(x-a)^{m-1}+\chi''(x-a)^{m-2}\ldots$$
$$+m(m-1)(m-2)\ldots P(x-a)^{m-r}.$$

Ciocchè abbiamo detto di Fx potendosi applicare a φx, si troverà che il differenziale dell' ordine r della funzione proposta avrà la seguente forma

$$\frac{\frac{d^rFx}{dx^r}}{\frac{d^r\varphi x}{dx^r}}=\frac{\chi(x-a)^m+\chi'(x-a)^{m-1}\ldots+m(m-1)\ldots}{Z(x-a)^n+Z'(x-a)^{n-1}\ldots+n(n-1)\ldots}$$
$$\frac{P(x-a)^{m-r}}{Q(x-a)^{n-r}}\;\ldots\ldots(42).$$

80. Ciò posto consideriamo tre casi

1° $n=m$, 2° $m>n$, 3° $m<n$

Se $m=n$, e che il numero r di differenziazioni fatte sia eguale ad m, i binomii $(x-a)^{m-r}$, $(x-a)^{n-r}$ si ridurranno entrambi ad $(x-a)^0$, cioè all' unità, per rispetto agli altri binomii $(x-a)^m$. $(x-a)^{m-1}$, ecc, $(x-a)^n$, $(x-a)^{n-1}$ ecc., essi sono nulli nella ipotesi di $x=a$: perciò tutt' i termini, fuori l' ultimo del numeratore, e del denominatore, svaniranno, e l' equazione (42) si ridurrà a

$$\frac{\frac{d^mFx}{dx^m}}{\frac{d^m\varphi x}{dx^m}}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots P}{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots Q}=\frac{P}{Q}.$$

Quando è $m>n$ se il numero r delle differenziazioni fatte è eguale ad n, il binomio $(x-a)^{n-r}$ ridurrassi ad $(x-a)^0=1$. Gli esponenti $n-1$, $n-2$ ecc., $m-1$, $m-2$ ecc. degli altri binomii, essendo maggiori di $n-r$, sorpassano l' unità; per conseguenza questi binomii riduconsi ciascheduno a zero, allorchè si fa $x=a$: dunque in questa ipotesi tutt' i termini svaniscono, all' infuori di quello nel quale vi entra $(x-a)^{n-r}$, e l'equazione (42) ridurrassi a

$$\frac{\frac{d^nFx}{dx^n}}{\frac{d^n\varphi x}{dx^n}}=\frac{0}{n(n-1)\ldots Q(x-a)^{n-r}}=\frac{0}{n(n-1)\ldots Q}=0.$$

Finalmente nel caso di $m<n$, il numero r delle differenziazioni fatte, supposto eguale ad m, tutt'i termini svaniranno fuorchè $m(m-1)\ldots P(x-a)^0$, e resterà

$$\frac{\frac{d^mFx}{dx^m}}{\frac{d^m\varphi x}{dx^m}}=\frac{m(m-1)\ldots\ldots P}{0}=\infty:$$

questo valore annuncia dunque che m sorpassa n caso ove il secondo membro dell' equazione 43 è infinito.

81. Da ciocchè precede ne risulta la seguente regola: *allorchè si vuol determinare il vero valore di una frazione* $\frac{Fx}{\varphi x}$, *che diviene* $\frac{0}{0}$ *per mezzo di un dato valore della variabile, si differenzieranno separatamente i due termini di questa frazione, e si*

esaminerà dopo se i valori $\frac{dFx}{dx}$, $\frac{d\phi x}{dx}$ *si riducano ancora a zero, mercè il volore ipotetico della variabile; se ciò ha luogo, si prenderanno i coefficienti differenziali dell' espressioni* $\frac{dFx}{dx}$ e $\frac{d\phi x}{dx}$, *e si vedrà se nella stessa ipotesi della variabile, questi coefficienti differenziali si riducano ciascuno a zero: continuando in tal modo questa verificazione, se dopo un certo numero di differenziazioni si trova che i due termini della frazione non svaniscono mercè un dato valore della variabile, questa ultima frazione sarà il vero valore di* $\frac{Fx}{\phi x}$; *ma se il numeratore solamente diviene* o *pel valore di* x, *l' espressione* $\frac{Fx}{\phi x}$ *sarà nulla; infine se il solo denominatore è quello che svanise pel dato valore di* x, *l' espressione* $\frac{Fx}{\phi x}$ *sarà infinita.*

82. **Prendiamo per esempio la frazione** $\frac{Fx}{\phi x} = \frac{x^3-b^3}{4x-4b}$: Questa frazione poicchè diviene $\frac{o}{o}$, allorchè $x=b$, se noi vogliamo averne il vero valore, differenzieremo i suoi due termini, ed avremo $\frac{3x^2}{4}$, e come i due termini di questa frazione non divengono nulli nell' ipotesi di $x=b$, il vero valore della frazione proposta sarà $\frac{3b^2}{4}$, allorchè $x=b$.

83. Prendiamo per secondo esempio la frazione

$$\frac{x^3-3x+2}{x^4-6x^2+8x-3};$$

Poichè questa riducesi a $\frac{0}{0}$; allorchè si fa $x=1$, differenzieremo i suoi due termini, per ottenere il valore, e troveremo

$$\frac{3x^2-3}{4x^3-12x+8}:$$

i due termini di questa frazione divenendo ancora nulli nell' ipotesi di $x=1$, li differenzieremo parimente, ed avremo

$$\frac{6x}{12x^2-12}.$$

In questa frazione il solo denominatore riducesi a zero, allorchè si fa $x=1$; dunque la proposta frazione diviene infinita, nell' ipotesi di $x=1$.

84. Se si applicasse la stessa regola alla frazione

$$\frac{a^x-b^x}{x},$$

che diviene $\frac{0}{0}$ nell' ipotesi di $x=0$, differenziando i due termini di essa, si troverà

$$\frac{a^x\log a-b^x\log b}{1},$$

espressione, il di cui numeratore non diviene nullo nell' ipotesi di $x=0$, e che per conseguenza da $\log a-\log b$, allorchè $x=0$.

Egli è ben evidente che il fattore comune a' due termini della frazione proposta è $x-0$, cioè x; ma come riconoscere questo fattore in a^x-b^x? Per giungervi, noi osserveremo che, per l' art. (37):

$$a^x = 1 + A\frac{x}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \text{ecc.}$$

$$b^x = 1 + B\frac{x}{1} + \frac{B^2x^2}{1.2} + \text{ecc.};$$

Dunque prendendo la differenza

$$a^x - b^x = (A-B)x + \frac{A^2 - B^2}{1.2}x^2 + \text{ecc.}$$

e si vede che x è fattore comune di $a^x - b^x$.

85. Non bisogna intanto credere che la regola esposta basti per tutt'i casi: la dimostrazione precedente è fondata sull'ipotesi che m ed n siano numeri interi; ma se essi fossero fratti, non potrebbe, per mezzo delle differenziazioni successive, ottenersi un termine, nel quale $x-a$ si trovasse elevato alla potenza o; per conseguenza non si potrebbe col metodo adottato al di sopra, sprigionar la frazione dal fattore comune.

Sia dunque, per maggiore generalità, l'equazione

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P(x-a)^\alpha + Q(x-a)^\beta + R(x-a)^\gamma + \text{ec.}}{P'(x-a)^{\alpha'} + Q'(x-a)^{\beta'} + R'(x-a)^{\gamma'} + \text{ec.}},$$

nella quale α, β, γ ec. sono dalle frazioni crescenti egualmente che α', β', γ', ecc.

Poichè questa espressione riducesi a $\frac{o}{o}$, allorchè si fa $x=a$, si potrà, invece di fare $x=a$, sostituire $a+h$ in luogo di x, riserbandoci di porre $h=o$, dopo le debite riduzioni: allora sarà lo stesso che di aver fatta da principio l'ipotesi di $x=a$: si avrà $x-a=h$, e perciò

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{Ph^\alpha + Qh^\beta + Rh^\gamma + \text{ecc.}}{P'h^{\alpha'} + Q'h^{\beta'} + R'h^{\gamma'} + \text{ecc.}} \;\ldots\ldots (43).$$

Considerando α ed α', che sono i più piccoli nelle serie degli esponenti del numeratore, e del denominatore rispettivamente, si può dar luogo a tre supposizioni, cioè

$$1^a \quad \alpha > \alpha', \quad 2^a \quad \alpha = \alpha'; \quad 3^a \quad \alpha < \alpha':$$

Nel primo caso dividendo per $h^{\alpha'}$ i due termini della frazione (43), si avrà

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{Ph^{\alpha-\alpha'} + Qh^{\beta-\alpha'} + Rh^{\gamma-\alpha'} \text{ ec.}}{P' + Q'h^{\beta'-\alpha'} + R'h^{\gamma'-\alpha'} + \text{ec.}} \ldots (44):$$

Secondo la supposizione fatta è $\alpha > \alpha'$; dunque il numero $\alpha-\alpha'$ sarà positivo; ed a più forte ragione $\beta-\alpha'$, $\gamma-\alpha'$, $\beta'-\alpha'$, poichè per ipotesi si ha

$$\alpha < \beta < \gamma \text{ ec.}, \quad \alpha' < \beta' < \gamma' \text{ ec.}, \quad \alpha' < \alpha.$$

Ciò posto se si fa $h=o$ nell' equazione (44), tutt' i termini del secondo membro di essa svaniranno, fuori di P'; e perciò questa equazione ridurrassi a

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{o}{P'} = o$$

Nel 2.° caso, in cui è $\alpha=\alpha'$, il termine $Ph^{\alpha-\alpha'}$, riducesi a $Ph^{\circ}=P$; l'equazione (44) riducesi a

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P + Qh^{\beta-\alpha'} + Rh^{\gamma-\alpha'} + \text{ ec.}}{P' + Q'h^{\beta'-\alpha'} + R'q^{\gamma'-\alpha'} + \text{ec.}},$$

nella quale, fatto $h=o$, si avrà

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P}{P'}$$

Finalmente nel 3.° caso, in cui si ha $\alpha<\alpha'$, dividendo l'equazione (44) per h^{α}, essa si ridurrà a

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P + Qh^{\beta-\alpha} + R\,h^{\gamma-\alpha} + \text{ec.}}{P'h^{\alpha'-\alpha} + Q'h^{\beta'-\alpha} + R'h^{\gamma'-\alpha} + \text{ec.}}$$

e si vede chiaro, che l'ipotesi di $h=o$ riduce questa equazione a

$$\frac{Fx}{\varphi x}=\frac{P}{o}=\infty\ .$$

86. Prendiamo per esempio la frazione

$$\frac{(x^2-3ax+2a^2)^{\frac{2}{3}}}{(x^3-a^3)^{\frac{1}{2}}},$$

Che riducesi a $\frac{o}{o}$, allorchè si fa $x=a$. Se in questione si mette $a+h$ in vece di x, essa diverrà

$$\frac{(h^2-ah)^{\frac{2}{3}}}{(3a^2h+3ah^2+h^3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(h-a)^{\frac{2}{3}}\ h^{\frac{2}{3}}}{(3a^2+3ah+h^2)^{\frac{1}{2}}\ h^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(h-a)^{\frac{2}{3}}\ h^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}}{(3a^2+3ah+h^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(h-a)^{\frac{2}{3}}\ h^{\frac{1}{6}}}{(3a^2+3ah+h^2)^{\frac{1}{2}}}$$

facendo $h=o$, si avrà

$$\frac{Fx}{\varphi x}=\frac{o}{(3a^2)^{\frac{1}{2}}}=o$$

Questo metodo può applicarsi a tutt'i casi.

87. Se un valore di x rendesse infiniti amb'i termini della frazione, questi si dividerebbero per $Fx\,.\,\varphi x$, e si avrebbe

$$\frac{Fx}{\varphi x}=\frac{\frac{1}{\varphi x}}{\frac{1}{Fx}}=\frac{o}{o},$$

88. In fine se si avesse un prodotto MN, nel quale l' ipotesi di $x=a$ rendesse nullo uno de' fattori, e l' altro infinito; e sia M=o, e N=∞, si scriverebbe così questo prodotto.

$$MN=\frac{\frac{M}{1}}{N};\ ^{**}$$

e come allora sarebbe $\frac{1}{N}=o$, l' espressione $\frac{\frac{M}{1}}{N}$ si ridurrà a $\frac{o}{o}$.

De' massimi e minimi, nelle funzioni di una sola variabile.

89. Nella serie di Taylor si può dare un valore all' accrescimento h, tale che uno de' termini della serie divenga più grande della somma di tutti gli altri che seguono. Infatti, essendo questa serie rappresentata da

$$y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\ \frac{h^2}{2}+\frac{dy^3}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ ecc.}$$

se si vuole che $\frac{dy}{dx}\ h$, per esempio, divenga più grande della somma di tutti gli altri termini che seguono, mettiamo tutt' i termini della serie, meno il primo, sotto la forma

$$(\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{2}+\frac{d^3y}{dx^3}\ \frac{h^2}{2.3}\ +\text{ec.})h\ldots(45).$$

Or quando si fa $h=o$, divenendo parimente nulla la parte $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{2}$, $\frac{d^3y\ h^2}{dx^3 2.3}$, si vede bene ch' essa può esser resa tanto piccola, quanto si vorrà, dando ad h un valore assai vicino al zero, ed esser così sorpassata da $\frac{dy}{dx}$, ch' è indipendente da h. Sia dunque Z ciocchè diviene in questo caso $\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{2}$+ec.;

La serie (45) ridurrassi a $(\frac{dy}{dx}+Z)h$; e come allora si ha $\frac{dy}{dx}>Z$, o $\frac{dy}{dx}h>Zh$, il termine $\frac{dy}{dx}$ h risulta più grande della somma di tutti quelli , che seguono. Lo stesso si dimostrerebbe per ogni altro termine rispetto a quelli che lo seguono.

90. Sia $y=\varphi x$, una equazione tra due variabili; Questa equazione può esser sempre riguardata come quella di una curva, in cui i differenti valori della funzione y sarebbero le ordinate ; questa funzione y dirassi giunta al suo minimo , allorchè dopo di aver diminuita successivamente , essa è sul punto di ricominciare a crescere.

Sia per esempio la curva MDN, Fig. 6, che ha per equazione $y=b+cx^2$; si vede che le ordinate $n''q''$, $m'p'$ ecc. vanno diminuendo fino al punto D; e che al di là di questo punto le ordinate $p'm'$, $q''n''$ ec. vanno sempre crescendo: perciò l' ordinata AD rappresenta il minimo valore della funzione y.

91. Similmente una funzione si dirà giunta al suo massimo , allorchè dopo di esser cresciuta successivamente , essa arriva ad un punto , al di là del quale comincia a diminuire.

La curva CDE, Fig. 7 , la cai equazione è $y=b-cx^3$, ci presenta un esempio di questo caso nel punto D , poicchè le ordinate che seguono e precedono immediatamente AD sono minori di essa : dunque l' ordinata AD è un massimo.

92. Vi sono delle curve , le quali non hanno che un massimo , delle altre le quali non hanno che un minimo ; alcune hanno l' uno e l' altro ; altre non en sono suscettibili.

Si vede, per esempio, Fig. 6 la curva MDN, la cui equazione è $y=b+cx^2$, non può avere un massimo, poicchè, dietro la natura della sua equazione, le ordinate vanno sempre cresc ndo.

Il cerchio CBD, Fig. 8 la cui equazione è

$$a^2=(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2.$$

ha un massimo ed un minimo, che corrispondono alla stessa ascissa AR: il massimo è RD, il minimo RB.

93. Allorchè una funzione y della variabile x ha un massimo ed un minimo, l'uno e l'altro sarebbe determinato, se si conoscesse l'ascissa che vi corrisponde: per esempio, se in una curva che ha per equazione $y=\varphi x$, si conoscesse il valore a dell'ascissa x, che corrisponde al massimo o al minimo, basterebbe di fare $x=a$ nell'equazione $y=\varphi x$, per determinare il valore di y, ch'è il massimo o il minimo domandato.

94. Sia dunque Fig. 7 $y=fx$ un'ordinata AD giunta al suo massimo; se l'ascissa A'A riceve un accrescimento h rappresentato da AP', e che prendasi ancora $AP''=h$, si avrà, dietro la condizione che AD sia un massimo

$$P'M'<AD \qquad\qquad P''M''<AD$$

o

$$f(x+h)<fx, \qquad\qquad f(x-h)<fx$$

Se al contrario, Fig. 6, AD è un minimo rappresentando per A'A il valore di x che vi corrisponde, e prendendo $Ap'=Ap''=h$, avremo dietro le condizioni del minimo

$$p'm'>AD \qquad\qquad p''m''>AD$$

o

$$f(x+h)>fx \qquad\qquad f(x-h)>fx$$

Perciò vi sarà un massimo, quando $f(x+h)$ e $f(x-h)$ sono nello stesso tempo minori di fx; e se sono maggiori, vi sarà un minimo: infine se una di queste funzioni è maggiore, e l' altra minore di fx, non vi sarà nè massimo, nè minimo.

95. Vediamo dunque in qual caso queste condizioni possono essere adempite: a tal oggetto, abbiamo pel teorema di Taylor.

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ecc. } (46).$$

Se in questa formola si cambii h in $-h$, si troverà

$$f(x-h)=y-\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.}\ldots(47).$$

Affinchè $y=fx$ sia un massimo, o un minimo, bisogna che questi due sviluppi siano insieme più grandi, o più piccoli di y; or ciò non può avvenire, a meno che $\frac{dy}{dx}$ non divenga nullo. Infatti se si supponga h picciolissimo, potrassi sempre far in modo che $\frac{dy}{dx}h$ sorpassi la somma algebrica di tutt'i termini che lo seguono: In questo caso il segno che affetterà $\frac{dy}{dx}h$ sarà lo stesso che quello di $\frac{dy}{dh}$ aggiunto ai termini che lo sieguono: perciò se in questa ipotesi $\frac{dy}{dx}h$ è positivo in uno degli sviluppi (46) e (47), tutto questo sviluppo, sarà maggiore di y, e lo sarà minore, se $\frac{dy}{dx}h$ è negativo. Or il segno che effetta $\frac{dy}{dx}h$ essendo contrario in questi sviluppi, bisogna, che se $\frac{dy}{dx}h$ è positivo in uno di essi, sia negativo nell' altro; d'onde ne segue, che una delle due espressioni $f(x+h)$,

$f(x-h)$ sarà maggiore di fx, per cui l'altra ne sarà minore.

Dunque non potrà esservi massimo o minimo, se $\frac{dy}{dx}h$ non sia nullo; ma se si ha $\frac{dy}{dx}=0$, allora gli sviluppi (46), e (47) si ridurranno respettivamente a

$$f(x+h)=y+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.}$$

$$f(x-h)=y+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.}$$

In questo caso, il segno de' termini che seguono y dipenderà da $\frac{d^2y}{dx^2}$, se si prende h tanto piccolo, in modo che questo termine sorpassi la somma di tutti quelli che lo seguono; e come $\frac{d^2y}{dx^2}$ ha lo stesso segno ne' due sviluppi, ne risulterà che se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo, le due funzioni di $(x+h)$ e di $(x-h)$ saranno più grandi di fx; in questo caso fx è un minimo. Similmente se $\frac{d^2y}{dx^2}$ è negativo, si vede che fx sarà un massimo.

96. Per rendere compiuta questa teorica, osserveremo, che oltre di $\frac{dy}{dx}=0$, può anche aversi $\frac{d^2y}{dx^2}=0$; in questo caso non potrà esservi luogo a massimo o

a minimo, se non quando si ha $\frac{d^3y}{dx^3}=0$. Allora il segno delle quantità che seguono y dipenderà da $\frac{d^4y}{dx^4}$, quando si darà ad h un valore piccolissimo; e si proverà che se $\frac{d^4y}{dx^4}$ è positivo, fx sarà un minimo, e sarà un massimo s' è negativo: e così in seguito.

In generale, allorchè il primo coefficiente che non svanisce è di ordine pari, vi è luogo ad un minimo, s' esso è positivo, ed ad un massimo, s' è negativo.

97. Per primo esempio, prendiamo la funzione $a-bx+x^2$; avremo dunque

$$y=a-bx+x^2;$$

differenziando e dividendo per dx, si avrà

$$\frac{dy}{dx}=-b+2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=2.$$

Il valore positivo di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ci fa conchiudere che la funzione ha un minimo. Per determinare l' ascissa che corrisponde a questo minimo, si porrà eguale a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, e si avrà $x=\frac{b}{2}$; se questo valore di x si sostituisce in quello di y, si troverà $y=a-\frac{b^2}{4}$ pel minimo richiesto.

98. Sia ancora la funzione $a^4+b^3x-c^3x^2$; differenziando l' equazione $y=a^4+b^3x-c^2x^2$, e dividendo per dx, si troverà

$$\frac{dy}{dx}=b^3-2c^2x\ ;\ \frac{d^2y}{dx^2}=-2c^2\ .$$

Avendo $\frac{d^2y}{dx^2}$, un valore negativo, si vede che nella funzione vi è un massimo; L' equazione $b^3-2c^2x=o$ ci da $x=\frac{b^3}{2c^2}$ per l' ascissa che corrisponde a questo massimo, e sostituendo questo valore di x in quello di y, si troverà

$$y=a^4+\frac{b^6}{4c^2}$$

99. Sia ancora l' equazione

$$y=3a^2x^3-b^4x+c^5\ ;$$

si avrà

$$\frac{dy}{dx}=9a^2x^2-b^4\ ,\ \frac{d^2y}{dx^2}=18a^2x\ ;$$

eguagliando a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, si avrà

$9a^2x^2-b^4=o$, da cui si ottiene $x=\pm\frac{b^2}{3a}$;

Questi due valori di x, sostituiti successivamente in quello di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ci fanno vedere che nella funzione vi è un massimo, ed un minimo. Il minimo corrisponde all' ascissa $+\frac{b^2}{3a}$, el massimo all'ascissa $-\frac{b^2}{3a}$: mettendo questi due valori in quello di y si troverà

$y = c^3 - \frac{2b^6}{9a}$ pel minimo, ed $y = c^3 + \frac{2b^6}{9a}$ pel massimo.

Applicazione della teoria de' massimi e minimi alla soluzione di diversi problemi.

Problema I.

100. *Dividere un numero in due parti tali che il prodotto di una per l'altra sia il più grande possibile.*

Sia a questo numero, ed x una delle parti; l'altra sarà $a-x$. Dunque $x(a-x)$ è la quantità, di cui si domanda il massimo: differenziando e dividendo per dx l'equazione $y=x(a-x)=ax-x^2$, troveremo

$$\frac{dy}{dx}=a-2x, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-2$$

Il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ci mostra che la funzione effettivamente racchiude un massimo. Se questo coefficiente si fosse trovato positivo, il problema sarebbe stato impossibile. Eguagliando a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, troveremo $x=\frac{1}{2}a$, il che ci fa vedere che bisogna dividere il numero a in due parti eguali, affinchè il prodotto di esse sia un massimo.

Problema II.

101. *Fra tutt' i cilindri iscritti in un cono retto, determinar quello che ha il più gran volume.*

Fig. 9. Sia a, Fig. 9, l'altezza SC del cono, b il rag-

gio AC della sua base, ed x la distanza SD del vertice del cono al centro del cilindro. Fig. 9.

I triangoli simili SAC, SED ci daranno

$$SC : AC = SD : ED, \text{ o}$$

$$a : b = x : ED = \frac{bx}{a}$$

Sia $1:\pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza; si sa che il cerchio, il cui raggio è r ha per superficie πr^2; dunque il cerchio EGF, il cui raggio è $\frac{bx}{a}$, avrà per superficie $\frac{\pi b^2}{a^2}x^2$; moltiplicando questa superficie per l'altezza DC del cilindro, cioè per $a-x$, il volume del cilindro avrà per valore $\frac{\pi b^2}{a^2}x^2(a-x)$; sicchè si dovrà differenziare l'equazione

$$y = \frac{\pi b^2}{a^2}(ax^2 - x^3);$$

da essa se ne deduce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi b^2}{a^2}(2ax - 3x^2), \text{ e } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\pi b^2}{a^2}(2a - 6x);$$

eguagliando a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, si ha

$$\frac{\pi b^2}{a^2}(2ax - 3x^2) = 0, \text{ o piuttosto } 2ax - 3x^2 = 0,$$

equazione ch'è il prodotto di x, e $2a-3x$, e che perciò da $x=0$, $x=\frac{2}{3}a$; il valore $x=0$ non può corrispondere ad un massimo, poichè in questa ipotesi

$\frac{d^2y}{dx^2}$ riducesi a $\frac{2\pi b^2}{a}$, numero positivo: questo valore indica un minimo; ed infatti quando $x=0$, il cilindro riducesi all'asse del cono (poichè quanto più è alto il cilindro, tanto più è sottile).

Il valore $x=\frac{2a}{3}$ è dunque il solo che possa soddisfare alla quistione; infatti in questa ipotesi $\frac{d^2y}{dx^2}$ riducesi a $-\frac{2\pi b^2}{a}$, numero negativo. Risulta da ciocchè precede, che *il più gran cilindro circoscritto al cono retto, ha per altezza due terze parti di quella del cono.*

Problema III.

Fig. 8. 102. *Dividere una retta* A'X', *in due parti* A'K, KX', *in modo che il prodotto di* $\overline{A'K}^3$. KX' *sia un massimo.*

La retta A'X' rappresentisi con a, e con x la parte A'K di essa, l'equazione del problema sarà

$$y=x^3(a-x);$$

da questa se ne deduce

$$\frac{dy}{dx}=3ax^2-4x^3, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=6ax-12x^2;$$

eguagliando a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, si trova $x=0$, ed $x=\frac{3a}{4}$. Questo secondo valore è il solo, che possa sciogliere il problema, poicchè esso riduce quello di $\frac{dy^2}{dx^2}$ a $-\frac{9a^2}{4}$, risultamento negativo.

103. Osserviamo, che quando nel valore del coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$ vi è un fattore costante positivo, può supprimersi. Infatti, se si ha

$$\frac{dy}{dx}=A\varphi x\ ,$$

si deduce

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A\ \frac{d\varphi x}{dx}\ .$$

Poicchè questa seconda equazione non ha altr' oggetto, che quello di farci conoscere il segno del valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, questo segno non dipende che da quello il quale apparterà a $\frac{d\varphi x}{dx}$, poicchè A è un fattore costante positivo; dunque A può esser tolto in questa equazione: Può esser tolto parimente nell' equazione $\frac{dy}{dx}=A\varphi x$; poicchè dovendosi eguagliare a zero il secondo membro di questa equazione, per determinare x, l' equazione $A\varphi x=0$, darà $\varphi x=0$; d' onde segue che si può sempre omettere la costante.

Problema IV.

104. *Si vuol far entrare in un vaso cilindrico una certa quantità di acqua, il cui volume è no-*

to ; si domanda quali dimensioni bisogna dare a questo vase , affinchè la sua superficie interna sia la più piccola possibile.

Sia V il dato volume d' acqua , ed x il raggio della base del cilindro ; πx^2 sarà l'aja della sua base , e πx^2. alt.cilind , il suo volume ; perciò si avrà

$$\text{altez cilind } \pi x^2 = V ,$$

da cui si ha

$$\text{altez cilind } = \frac{V}{\pi x^2} :$$

moltiplicando quest' altezza per la circonferenza della base , ch' è $2\pi x$, si avrà

$$\frac{V}{\pi x^2} . 2 \pi x = \frac{2V}{x}$$

per la superficie convessa del cilindro. Se a questa si unisce πx^2 , ch' è quella della base del cilindro , l'equazione che si dovrà differenziare , sarà

$$y = \frac{2V}{x} + \pi x^2$$

e se ne dedurrà

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2V}{x^2} + 2\pi x ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4V}{x^3} + 2\pi .$$

Eguagliando a zero il valore di $\frac{dy}{dx}$, si ha

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)}$$

Si vede che questo valore corrisponde ad un minimo , poichè esso rende positivo quello di $\frac{d^2y}{dx^2}$: dunque il raggio della base del cilindro cercato sarà $\sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)}$. Se questo valore si mette nell' espressione dell' altezza , si troverà per altezza del cilindro.

$$\frac{V}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)^2}} = \frac{V}{\frac{V^{\frac{2}{3}}\,\pi}{\pi^{\frac{2}{3}}}} = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\left(\frac{V}{\pi}\right)}.$$

PROBLEMA V.

105. *Tra tutt' i coni iscritti in una sfera , determinar quello , che ha una più grande superficie convessa.*

Supponiamo che il semicerchio CMX , fig. 8. . faccia una rivoluzione intorno dell' asse CX , la corda CM genererà un cono , la cui altezza sarà CP , ed MP il raggio della base.

La superficie convessa di questo cono avrà per espressione $2\pi PM. \frac{1}{2} CM = \pi PM. CM$: Dunque non si tratta che di determinare PM e CM. A tal oggetto siano $CX = 2a$, $CP = x$; essendo MP media proporzionale tra CP , e PX , si ha

$$PM = \sqrt{x(2a-x)} = \sqrt{(2ax-x^2)} :$$

È similmente essendo CM media proporzionale tra CX e CP, si avrà

$$CM=\sqrt{2ax};$$

e perciò
superf. conves. del cono $=\pi\sqrt{(2ax-x^2)}.\sqrt{2ax}$

$$=\pi\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)};$$

dunque l' equazione che si dee differenziare è (art. 102).

$$y=\pi\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)};$$

dalla quale se ne deduce

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4a^2x-3ax^2}{\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)}}\ldots(48).$$

Eguagliando questo valore di dx a zero, si avrà

$$4a^2-3ax=0,$$

equazione che resta soddisfatta supponendo $x=\frac{4a}{3}$.

Questo valore appartiene ad un minimo; ciocchè ci vien confirmato da $\frac{d^2y}{dx^2}$.

106. Prima di determinare il valore di questo coefficiente differenziale, vado a mettere in veduta un metodo che in alcuni casi abbrevierà i calcoli.

Osserverò primieramente, che quando una funzione di x divien nulla per un dato valore della variabile x, in generale non può conchiudersi che anche il suo coefficiente differenziale sia nullo: per esempio, se si ha la funzione x^2-5x+6, che diviene nulla, allorchè $x=2$, o $x=3$, il coefficiente differenziale di questa funzione, ch' è $2x-5$, non diviene sicuramente nullo nelle stesse ipotesi.

107. Si possono qualchevolta abbreviare di molto le operazioni che s' impiegano per riconoscere se una funzione sia suscettibile di massimo o di minimo. In fatti, supponendo che si voglia determinare il coefficiente differenziale dell' equazione $y=XX'$, nella quale X, ed X' sieno funzioni di x, di cui la prima solamente diviene nulla dietro un dato valore di x, differenziando questa equazione (art. 14), e dividendo per dx, si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{XdX'}{dx}+\frac{X'dX}{dx};$$

ed essendo per ipotesi $X=0$ pel dato valore di x, questa equazione si ridurrà a

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{X'dX}{dx}.$$

Da ciò si conchiude che per ottenere $\frac{d^2y}{dx^2}$, bisogna moltiplicare il coefficiente differenziale del fattore nullo per l' altro fattore *.

---

* Questa regola non è senza eccezione, poicchè $\frac{dX}{dx}$ può essere anche nullo. Per esempio se si avesse $\frac{dy}{dx}=x^2(x-a)^2$, equazione che ha radici eguali, i due termini del valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarebbero nulli, ed invece di sopprimere il fattore rappresentato da $X\frac{dX'}{dx}$

*

108. Per esempio se si vuol ottenere il coefficiente differenziale del secondo ordine di $\frac{x-a}{\sqrt{x}}$ nell' ipotesi di $x=a$, si farà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot(x-a)\text{ , e}$$

si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{d(x-a)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

109. Riprendiamo ora l' equazione (48), dalla quale si vuol avere il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, nell' ipotesi di $x=\frac{4a}{3}$: decomponendo il numeratore ne' suoi fattori

si avrà

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{ax(4a-3x)}{\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)}}=\frac{ax}{\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)}}\cdot(4a-3x)\right);$$

nell' ipotesi attuale, essendo nullo il fattore $(4a-3x)$: si avrà (art. 107).

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ax}{\sqrt{(4a^2x^2-2ax)^3}}\cdot\frac{d(4a-3x)}{dx}=\frac{-3ax}{\sqrt{(4a^2x^2-2ax^3)}}$$

---

si dovrebbe, art. 96, ricorrere a' coefficienti differenziali degli ordini superiori, per riconoscere se la funzione è suscettibile di un massimo, o di un minimo; se $\frac{dX'}{dx}$ fosse infinito, s' incontrerebbe il caso dell' art. 87.

e per conseguenza, dividendo i due termini della frazione per x

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3a}{\sqrt{(4a^2-2ax)}} :$$

mettendo in questa equazione il valore di x ch' è $\frac{4a}{3}$, si otterrà in fine

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -\frac{3a}{(\sqrt{4a^2-\frac{8a^2}{3}})} = -\frac{3a}{\sqrt{\frac{4a^2}{3}}}$$

Questo valore essendo negativo, quello di x corrisponde ad un massimo.

Problema VI.

110. *Dato un punto* (Fig. 10) *E tra' lati dell' angolo YAX, si domanda di far passare per questo punto una retta CB, tale che, incontrando gli assi AX, AY, ne' punti B, C, sia CB un minimo.* Fig. 10

Sia $AI = a$, $IE = b$, $IB = x$; i triangoli rettangoli IEB, ACB, ci danno

$$IB : IE = AB : AC, \text{ o } x : b = a + x : AC;$$

dunque sarà

$$AC = b\frac{a+x}{x},$$

e perciò

$$AC^2 = \frac{b^2}{x^2}(a+x)^2;$$

si ha dippiù

$$\overline{AB}^2 = (a+x)^2;$$

dunque sostituendo questi valori nella formola

$$BC = \sqrt{(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)}$$

Fig. 10 si avrà

$$BC = \sqrt{\left[\left(\frac{b^2}{x^2}+1\right)(a+x)^2\right]} = \sqrt{\left[\left(\frac{b^2+x^2}{x^2}\right)(a+x)^2\right]}$$
$$= \frac{a+x}{x}\sqrt{(b^2+x^2)} = y.$$

Riguardando questa espressione come il prodotto del fattore $\frac{a+x}{x}$ per l' altro $\sqrt{(b^2+x^2)}$, si differenzierà colle regole dell' art. 14, e si troverà

$$dy = \frac{a+x}{x}\, d\sqrt{(b^2+x^2)} + \sqrt{(b^2+x^2)}\, d\frac{a+x}{x} =$$

$$\frac{(a+x)}{x}\,\frac{xdx}{\sqrt{(b^2+x^2)}} + \sqrt{(b^2+x^2)} \cdot -\frac{adx}{x^2},$$

riducendo allo stesso denominatore, e moltiplicando i due termini della prima frazione per x, ed i due termini della seconda per $\sqrt{(b^2+x^2)}$, si otterrà

$$dy = \frac{(a+x)}{x^2}\,\frac{x^2dx}{\sqrt{(b^2+x^2)}} + \frac{b^2+x^2}{x^2\sqrt{(b^2+x^2)}} \cdot -adx;$$

riunendo, e riducendo i termini del numeratore, e dividendo per dx, ne verrà infine

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - ab^2}{x^2\sqrt{(b^2+x^2)}};$$

eguagliando a zero il numeratore, si ha

$$x = \sqrt[3]{(ab^2)}.$$

Per dimostrare che questo valore corrisponde ad un minimo, metteremo solamente, art. 107., invece del numeratore ch' è il fattore nullo, il suo coefficiente differenziale, e così avremo

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3x^2}{x^2\sqrt{(b^2+x^2)}}=\frac{3}{\sqrt{(b^2+x^2)}},$$ Fig. 10

valore essenzialmente positivo, poichè i quadrati b^2, ed x^2 sono sempre positivi.

Problema VII.

111. *Trovare il più gran triangolo rettangolo, che possa costruirsi su di una data retta.*

Sia $DB=a$ la retta data, Fig. 10, x uno de' lati del triangolo, l' altro sarà $\sqrt{(a^2-x^2)}$; quindi la superficie del triangolo avrà per espressione

$$\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}:$$

perciò l' equazione del problema sarà art. 103,

$$y=x\sqrt{(a^2-x^2)}=\sqrt{(a^2x^2-x^4)}:$$

da questa se ne dedurrà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a^2x-2x^3}{\sqrt{(a^2x^2-x^4)}}.$$

Facendo $a^2x-2x^3=0$, o $x(a^2-2x^2)=0$, si avrà $x=0$, e perciò $2x^2=a^2$. Non potendo x essere nullo, è chiaro che questo solo secondo valore convenga al problema; perciò i due catetti CD, CB saranno eguali; differenziando il fattore a^2-2x^2, si avrà, art. 107:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x}{\sqrt{(a^2x^2-x^4)}}\cdot\frac{d(a^2-2x^2)}{dx}=-\frac{4x^2}{\sqrt{(a^2x^2-x^4)}}.$$

Questo risultamento essendo negativo, l' ipotesi di $a^2-2x^2=0$, da per x un valore che corrisponde ad un massimo.

Della significazione geometrica de' coefficienti differenziali.

112. Si è veduto, art. 71, che $\frac{dy}{dx}$ rappresentava la tangente trigonometrica dell' angolo che fa coll' asse della x una tangente tirata per un punto di una curva in cui le coordinate sono x, y. Come questa verità è il fondamento della teorica, che segue, essa può esser dimostrata *a priori* nel seguente modo.

Fig. 3 Siano (Fig. 3) $PM=y$, $PP'=h$; menando la parallela MQ all' asse delle ascisse, si avrà

$$M'P'=f(x+h):$$

$$M'Q=f(x+h)-fx=\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{ecc.};$$

or

$$MQ : M'Q = 1 : \text{tang}\, S=\frac{M'Q}{MQ},$$

e mettendo per $M'Q$, MQ i di loro rispettivi valori si avrà

$$\text{tang}S=\frac{\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{ec.}}{h}=\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h}{1.2}+\text{ecc.}$$

Passando al limite, h è nullo, e tang S si cambia in tang T.

Dunque in tal caso si avrà

$$\text{tang}T=\frac{dy}{dx}.$$

Ciò posto, se PM diviene un massimo, come AD (Fig. 8), la tangente divenendo parallella all' asse delle ascisse, come DT, non farà angolo con questo asse, e come si ha $\tang(MT,x)=\frac{dy}{dx}$ (Fig. 3), si avrà (Fig. 8.) $\tang(DT,x)=\frac{dy}{dx}=0$.

Similmente si dimostrarebbe che, se PM fosse un minimo, la tangente trigonometrica, divenendo parimenti nulla, dovrebbe aversi $\frac{dy}{dx}=0$. Fig. 3

Perciò la frazione $\frac{dy}{dx}$ non esprime altro che la condizione del parallelismo della tangente in D (Fig. 6, ed 8) all' asse delle ascisse. Fig. 6. ed 8.

113. Esaminiamo ora in quale circostanza la frazione $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positiva o negativa. A tal effetto consideriamo parimente il caso, in cui la curva volge la sua convessità all' asse delle ascisse (Fig. 6).

Siano $A'A=x$, $AD=y$, $Ap'=p'q'=h$; e pe' punti D, ed m' tirinsi la segante $Dm'S$, e le rette DK, $m'K'$ parallelle all' asse delle ascisse; si avrà Fig. 6.

$$m'o=m'p'-DA=f(x+h)-fx,$$

cioè

$$m'o=\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{ecc.};$$

Or la simiglianza de' triangoli $Dm'o$, DSK ci da

$$Do : DK=m'o : SK,$$

$$h : 2h=m'o : SK=2m'o;$$

e sostituendo ad $m'o$ il suo valore, si ha

$$SK = 2\frac{dy}{dx}h + 2\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{ecc.}$$

Da un' altra parte si ha

$$n'q' = f(x+2h);$$

sicchè sarà $n'K = n'q' - DA = f(x+2h) - fx =$

$$\frac{dy}{dx}2h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{4h^2}{1.2} + \text{ecc.};$$

e perciò

$$n'S = n'K - SK = \frac{d^2y^2}{dx^2}h^2 + \text{ec.} \ldots (49).$$

Fig. 7 Nel caso in cui la curva volge la sua concavità all' asse delle ascisse (Fig. 7), per avere $n'S$, bisognerà al contrario dal valore di SK, toglierne $n'K$, ciocchè darà

$$nS = SK - n'K = -\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{ecc.} \ldots (50).$$

Paragonando i valori (49), e (50) di $n'S$, si vede che nel primo, $\frac{d^2y}{dx^2}$ è preceduto dal segno +, e nell' altro dal segno — .

Ciò posto, può farsi in modo, che dal segno del primo termine dello sviluppo di $n'S$ dipenda quello di tutto questo sviluppo, e come il quadrato h^2, ch' è essenzialmente positivo, non può influire sul segno di $\frac{d^2y}{dx^2}h^2$, quello che solamente potrà decidere del segno di $n'S$, sarà il coefficiente differenziale $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Sicchè esaminando l'equazioni (49), e (50) solamente rispette a' segni, si potrà sopprimere h^2, ed i termini che seguono $\frac{d^2y}{dx^2}$, e quest' equazioni diverranno rispettivamente

$$(\text{Fig.6})\ n'S = +\frac{d^2y}{dx^2}\ ;\ (\text{Fig. 7})\ n'S = -\frac{d^2y}{dx^2}\ ;$$ Fig. 6

da cui si ha (Fig.6)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +n'S \ldots (51)\ ;\ (\text{Fig.7})\ \frac{d^2y}{dx^2} = -n'S \ldots (52).$$

Se y si riguarda come una quantità positiva, $n'S$, Fig. 6, prendendosi per lo stesso verso di y, sarà positivo; sicchè l'equazione (51) ci fa vedere, che $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo, quando la curva volge la sua convessità all' asse delle scisse.

Se poi si considera l'equazione (52), e la Fig. 7, che la riguarda, si vedrà che $-n'S$ rappresenta una retta presa in un verso opposto a quello di y, il che fa sì che $\frac{d^2y}{dx^2}$, è negativo, e che perciò in questo caso la curva volti la sua concavità all' asse delle ascisse.

114. Si è supposto finora la curva situata al di sopra dell' asse delle ascisse: esaminiamo ciocchè accade, allorchè essa si stende al disotto, come nella (Fig.26). Egli è chiaro, da ciocchè precede, che, poichè la curva rivolge in M la sua convessità verso l'asse delle ascisse, $\frac{d^2y}{dx^2}$, e perciò MN è positi- Fig.26

vo ; or le rette MN, M'N', che sono situate dalla stessa parte della tangente TT', debbono avere lo stesso segno, e come MN è positivo, M'N' dee esserlo ancora; d'onde segue che al punto M', ove la curva volge la sua concavità verso l'asse della ascisse, $\frac{d^2y}{dx^2}$ avrà un segno contrario a quello dell'ordinata P'M', ch'è negativa; la curva volgerebbe, al contrario, la sua convessità, se y e $\frac{d^2x}{dx^2}$ avessero lo stesso segno. In guisa che può dirsi in generale che da qualunque parte cada la curva, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ha lo stesso segno di y, allorchè la curva volge la sua convessità all'asse delle ascisse, e prende un segno contrario, allorchè vi volta la concavità. La curva volgendo la sua convessità, e la sua concavità all'asse delle ascisse, secondochè l'ordinata è giunta al suo massimo, o minimo, si conosce perchè $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo nel primo caso, e negativo nel secondo.

115. Può esservi ancora un massimo o un minimo, allorchè si ha $\frac{dy}{dx}=\infty$. Per dimostrare ciocchè significa questa condizione, sia $y=fx$ l'equazione di
Fig. 8. una curva MN, (Fig. 8); egli è certo che se si da ad x un valore AP, questa equazione determinerà l'ordinata PM.

Se in seguito si scioglie l'equazione per rispetto ad x, e che si ottenga $x=\varphi y$; egli è chiaro che se si farà $y=AP$ (valore precedente di y), l'equazione darà $x=PM$. In quest'ultimo caso, y sarà considerata come l'ascissa, ed x come l'ordinata, e si costruirà la stessa curva, purchè le ascisse y si prendano sull'asse A'Y, e che l'altro asse sia riguardato come quello delle ordinate.

In questa ipotesi, si può cercare il massimo, o il minimo della funzione x di y. A tal oggetto si otterrà dall'equazione proposta $\frac{dx}{dy}=M$, e si supporrà $M=o$: ciò posto l'equazione $\frac{dx}{dy}=M$ ci da $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{M}=\frac{1}{o}=\infty$: sicchè la condizione necessaria, affinchè vi sia luogo al massimo, o al minimo nel senso delle ascisse è $\frac{dy}{dx}=\infty$.

116. Per esempio, se si prendesse l'equazione

$$y^2=ax-b$$

se ne otterrebbe $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y}$: eguagliando a zero questo valore, si ha $y=\infty$; dunque la curva non può avere un massimo nel senso delle ordinate, che ad una distanza infinita dall'asse delle ascisse. Esaminiamo ora se essa ha un limite nel senso delle ascisse (in generale s'intende per limite il massimo o il minimo). A tal oggetto bisogna supporre infinito il valore di $\frac{dy}{dx}$, ciocchè da $\frac{a}{2y}=\infty$, condizione che rimane adempita quando si fa $y=o$: in questa ipotesi il valore di $\frac{d^2x}{dy^2}$ si riduce a $\frac{2}{a}$ risultamento positivo.

Si vede dunque che il valore di $y=0$ corrisponde ad un minimo di x. Questo si determinerà facendo $y=0$ nell'equazione proposta, ipotesi, che la ridurrà a

$ax-b=0$, d'onde ne dedurremo $x=\frac{b}{a}$, che sarà il

minimo richiesto. Questo minimo è rappresentato da
Fig. 8 AX Fig. 8, che sarà la minima di tutte le x rispetto alla curva HXH'.

117. Terminando questa materia, osserveremo che

l'equazione $\frac{dy}{dx}=\infty$ c'indica che la tangente XK'

appartiene ad un angolo retto, e perciò è perpendicolare all'asse delle x.

Considerazioni generali sopra i punti singolari delle curve.

118. Il calcolo differenziale può essere di una grande utilità, per trovare la forma di una curva, di cui è data l'equazione. La teorica de' massimi e minimi ci offre i mezzi di determinare i limiti nel senso delle ascisse, ed in quello delle ordinate; ma ciò non basterebbe per farci riconoscere la forma della curva. Per esempio le curve delle figure (27) (28) e (29), che hanno gli stessi limiti OC, OD nel senso delle ordinate, ed OA, OB in quello delle ascisse, non si rassomigliano. Ciocchè distingue la curva (Fig. 27) dall'altra (Fig. 28), è che in quest'ultima non vi è che un sol punto d'inflessione: chiamasi così quel punto, ove la curva da concava diviene convessa, o da convessa concava. Nella curva, (Fig. 27) vi sono due punti d'inflessione, uno in E, l'altro in G, ed un punto di regresso in C; cioè

un punto, ove la curva sospende tutto ad un tratto il suo corso.

119. In generale, i punti ove la curva soffre de' cambiamenti, chiamansi *punti singolari*: si vede che se si ha il mezzo di conoscere i luoghi, ne' quali questi punti esistono, sarà facile di seguir la curva nel suo corso. Per esempio, se si sapesse che la curva (Fig. 29) ha de' punti d' inflessione in E ed in Fig. 29
H, e de' punti di regresso in F, e G, si potrebbe prendere un' idea di questa curva per mezzo dell' analisi seguente.

Partendo dal punto A, ch' è un limite nel senso delle ascisse, la curva volge sul principio la sua concavità verso l' asse delle ascisse fino ad E, ove esiste un punto d' inflessione, che da concava la fa divenire convessa. All' estremità F della parte convessa EF, essa sospende il suo corso al punto di regresso F, al di là del quale essa è ancora convessa nella parte FH, per tornare ad esser concava al di là del punto d' inflessione H, e continuare così fino al punto C, ch' è un limite nel senso delle ordinate: infine da C, e da A fino a G, la curva è composta di due archi CBG, ADG, che volgendo le loro concavità all' asse delle ascisse si riuniscono in un punto di regresso, e passano pe' due limiti B, D, l' uno nel senso delle ascisse, e l' altro delle ordinate.

120. Da ciocchè precede, si vede quanto sarebbe vantaggioso di potere, per mezzo dell' equazione di una curva, determinare le coordinate de' punti singolari: si è già fatto conoscere il metodo di determinare i massimi e minimi: non resta che ad occuparci della ricerca degli altri punti singolari; ciocchè diverrà il soggetto de' paragrafi seguenti.

De' punti d' inflessione.

121. Abbiamo veduto che un punto d' inflessione è quello, nel quale la curva da convessa diviene

concava, o da concava convessa. La curva M'MM''
Fig.30 (Fig. 30) ci offre in M un punto di questo genere. Tirisi per questo punto una tangente TT': se consideriamo le diverse ordinate comprese tra M'P', ed MP, osserveremo che il prolungamento M'N' dell'ordinata fino alla curva, andrà diminuendo a proporzione che si avvicina ad M, ove svanirà; se esaminiamo le seguenti ordinate, il prolungamento M''N'' dell'ordinata cadrà al di sotto della tangente, e per conseguenza cambierà di segno, in modochè se M'N' era positivo, M''N'' sarà negativo. Questa è la condizione che andremo ad esprimere con una equazione.

Sia dunque, (Fig. 30) $PP'=h=PP''$; si ha evidentemente

$$M'N'=M'P'-N'P',$$

$$M'N'=f(x+h)-N'P' \ldots (54):$$

Per determinare il valore analitico di $N'P'$ si ha

$$N'P'=MP+N'O,$$

ossia

$$N'P'=y+N'O \ldots, (55).$$

Rispetto al valore di $N'O$, il triangolo rettangolo $N'MO$ ci da

$$N'O=MO \operatorname{tang} N'MO;$$

Or si è veduto, art. 71, che l'angolo $N'MO$, formato dalla tangente in M con una parallela all'asse delle ascisse, avea $\frac{dy}{dx}$ per tangente trigonometrica; per conseguenza rimpiazzando $\operatorname{tang} N'MO$ con $\frac{dy}{dx}$, e mettendo h in luogo di MO, avremo

$$N'O=h\frac{dy}{dx}.$$

Sostituendo questo valore nell' equazione (55), e mettendo in seguito quello di N'P' nell'equazione (54), si avrà Fig.3.

$$M'N'=f(x+h)-y-\frac{dy}{dx}h\ldots(56).$$

Senz' aver bisogno di calcolar di nuovo il valore di M''N'', possiamo dedurlo da quello di M'N'; infatti se l'ordinata suppongasi ritrocedere parallelamente a se stessa, M'N' diverrà M''N'', allorchè h si cambierà in $-h$: dunque supponendo h negativa nell'equazione (56), si avrà

$$M''N''=f(x-h)-y+\frac{dy}{dx}h\ldots(57).$$

Mettiamo ora in luogo di $f(x+h)$, e di $f(x-h)$, i loro rispettivi sviluppi, si avrà

$$M'N'=\left(y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3}+\text{ecc.}\right)$$
$$-y-\frac{dy}{dx}h,$$

$$M''N''=\left(y-\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.}\right)$$
$$-y+\frac{dy}{dx}h,$$

e riducendo, quest' equazioni diverranno

$$M'N'=\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.}\ldots(58)$$

$$M''N''=\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}-\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.}\ldots(59).$$

Fig.30 Ciò posto, acciocchè in M vi sia un' inflessione, bisogna necessariamente, che, dando ad h un piccolissimo valore, le linee M'N' ed M''N'' cadano una sopra, e l'altra sotto della retta TT', il che esige che M'N', ed M''N'' abbiano segni contrarii: or ciò non è possibile, se non quando il primo termine

$\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2}$ delle serie (58), e (59) è nullo. Infatti, se ciò non fosse, si potrebbe dare ad h un valore picciolissimo, in modo che il termine $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1.2}$ sorpassasse la somma algebrica di tutti gli altri termini della serie; in questo caso il segno di questo termine deciderebbe di quello di tutta la serie; e come un tal termine è lo stesso nelle due serie, ne risultarebbe che M'N', M''N'' avrebbero necessariamente lo stesso segno; per conseguenza la condizione che M'N', M''N'' abbiano diversi segni esige che si abbia

$$\frac{d^2y}{dx^2} h^2=0, \text{ o piuttosto } \frac{d^2y}{dx^2}=0$$

122. Se avvenisse che lo stesso valore di x, pel quale $\frac{d^2y}{dx^2}$ diviene zero, facesse anche svanire $\frac{d^3y}{dx^3}$, bisognarebbe che $\frac{d^4y}{dx^4}$ fosse anche nullo, per darsi luogo ad un punto d' inflessione. E se $\frac{d^5y}{dx^5}$ fosse nullo, dovrebbe anche svanire $\frac{d^6y}{dx^6}$, e così in seguito; in guisa che dovrebbe essere di ordine pari

l' ultimo coefficiente differenziale che dovrebbe svanire.

123. Se il valore x, ch' è lo stesso negli sviluppi (58) e (59), fosse tale da rendere $\frac{d^2y}{dx^2}$ infinito, tali sarebbero ancora questi due sviluppi; ed allora niente si potrebbe conchiudere dalla dimostrazione precedente, che riposa sulla possibilità degli sviluppi medesimi: in questo caso bisogna osservare che la condizione $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ c' indica generalmente, che $\frac{d^2y}{dx^2}$ dee cambiar di segno al punto d' inflessione, ciocchè si accorda coll' art. 113: ma $\frac{d^2y}{dx^2}$ può benanche cambiar di segno, passando per l' infinito. Per darne un esempio, sia

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b^2}{x-a}.$$

Se si faccia successivamente

$$\left.\begin{array}{l} x=a-h \\ x=a \\ x=a+h \end{array}\right\} \text{si avrà} \quad \begin{array}{l} \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2}{h} \\ \frac{d^2y}{dx^2}=\infty \\ \frac{d^2y}{dx^2}=+\frac{b^2}{h}; \end{array}$$

E si vede che il denominatore del valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ è quello che fa cambiare di segno al coefficiente differenziale, dopo il punto d' inflessione.

124. Da ciocchè precede risulta, che per potersi avere un punto d'inflessione in una curva, bisogna che il valore dell'ascissa di questo punto faccia verificare una delle due seguenti equazioni

$$\frac{dy^2}{dx^2}=0\,,\ \frac{d^2y}{dx^2}=\infty\,.$$

Allorchè saremo sicuri, che una di queste due condizioni ha luogo, l'ascissa del punto, che fa sussistere una di esse, si aumenterà, o si diminuirà successivamente di una quantità picciolissima h; e se $\frac{d^2y}{dx^2}$ acquista valori di segno contrario per mezzo di questi nuovi valori di x, bisognerà conchiudere che vi è un punto d'inflessione; poicchè, allorchè $\frac{d^2y}{dx^2}$ è positivo, la curva volge la sua convessità verso l'asse delle ascisse, mentre che, quando $\frac{d^2y}{dx^2}$ é negativo, la curva volge la sua concavità verso lo stesso asse; ora è appunto per questo cambiamento di convessa in concava, o di concava in convessa, che la curva manifesta il suo punto d'inflessione.

125. Per dare un'applicazione di questa teorica, cerchiamo, se vi è un punto d'inflessione nella curva che ha per equazione

$$y=b+2(x-a)^3\ \ldots(60):$$

La differenziazione ci da

$$\frac{dy}{dx}=3.2\,(x-a)^2\,,\ \frac{d^2y}{dx^2}=12(x-a)\,,\ \frac{d^3y}{dx^3}=12\,.$$

La condizione di un punto d'inflessione richiede che vi sia un valore di x, che renda nullo il termine

$\frac{d^2y}{dx^2}$: or essendo x una quantità variabile, determiniamo uno de' suoi valori per mezzo della condizione $12(x-a)=0$; Si otterrà $x=a$ per l'ascissa che può appartenere ad un punto d'inflessione. Per assicurarci dell'esistenza di questo punto, diminuiscasi l'ascissa (Fig. 31) a di una piccola quantità h, e sostituiscasi $a-h$ ad x, si troverà che pel punto M' Fig. 31

segnato dall' ascissa $a-h$, si ha $\frac{d^2y}{dx^2}=-12h$;

in seguito mettasi $a+h$ in luogo di x: e si troverà che il punto M'' segnato dall'ascissa $a+h$, corrisponde a $\frac{d^2y}{dx^2}=12h$. Questi due valori di $\frac{d^2y}{dx^2}$ di segno differente ci mostrano che vi è in M un punto d' inflessione.

L' ipotesi di $x=a$ fa svanire $\frac{dy}{dx}$; per conseguenza la tangente al punto d'inflessione è paralella all' asse della x.

126. Bisogna osservare che non sempre si è nel caso di eguagliare a zero il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$: per esempio, se si volesse esaminare, se vi siano punti d' inflessione nella curva che ha per equazione

$$y=b+ax^2,$$

si troverebbe per mezzo della differenziazione

$$\frac{dy}{dx}=2ax\,,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2a:$$

Or si vede che il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ non può farsi eguale a zero, perchè essa non racchiude alcuna quantità indeterminata, e perciò la curva non può avere un punto d'inflessione; questo risultamento per altro era facile a prevedersi, essendo la curva una parabola. Il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ ci mostra solamente che questa parabola volge continuamente la sua convessità verso l'asse delle ascisse.

127. Per terza applicazione, prendiamo l'equazione

$$y^3=x^5;$$

risolvendola per rispetto ad y; ed in seguito differenziando, si ha

$$y=x^{\frac{5}{3}}\,,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}\,,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Se si cercasse determinare x per mezzo dell'equazione

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0\,,\quad \text{o piuttosto}\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}}=0,$$

non si potrebbe soddisfare a questa equazione, che facendo $x=\infty$, ciocchè non condurrebbe ad alcuna conseguenza; ma come possiamo fare benanche $\frac{d^2y}{dx^2}=\infty$, si soddisferà all'equazione $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\infty$ col fare $x=0$, questo valore di x ci fa comprendere che può esservi un punto d'inflessione all'origine: e per assicurarci dell' esistenza di questo punto, sostituiremo successivamente ad x i valori $x=0+h$, ed $x=0-h$, cioè h, e $-h$, e vedremo se in questi due casi $\frac{d^2y}{dx^2}$ dà de' risultamenti di segno contrario. Ma invece di fare queste operazioni l' una dopo l' altra, le potremo fare nel tempo stesso, sostituendo ad x la quantità $\pm h$; allora il coefficiente differenziale del secondo ordine diverrà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{5}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{h}}\,.$$

Il valore superiore si riferisce ad un' ascissa maggiore di quella del punto d' inflessione, el valore inferiore si rapporta ad un' ascissa minore. Come questi due valori hanno segno contrario, noi possiamo conchiudere che x corrisponde ad un punto d' inflessione A (Fig. 32). Fig. 32.

128. Per ultima applicazione, prendiamo la curva che ha per equazione

$$(y-b)^2 = x^3\,.$$

Questa equazione ci dà

$$y = b \pm x^{\frac{3}{2}}\,,\quad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{3}{2}\,x^{\frac{1}{2}}\,,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{\sqrt{x}}\,:$$

Facendo $x=0$, si ha $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, ciocchè indica che può esservi un punto d' inflessione all' origine. Per sapere se questo punto esiste, facciasi in primo luogo $x=h$, e sostituiscasi questo valore in quello di

$\frac{d^2y}{dx^2}$, il quale diviene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{h}} .$$

Se si fa in seguito $x = -h$, il valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ diviene imaginario, come quello di y, ciocchè dimostra che ad ascisse negative non vi corrisponde curva; perciò benchè $\frac{d^2y}{dx^2}$ sia infinito all' origine, non vi è affatto punto d' inflessione. Da qui a poco ci
Fig. 33 sarà facile di conoscere che l' origine C (Fig. 33) appartiene ad una classe di punti che sono stati compresi sotto il nome de' punti di *rigresso*: noi anderemo a prendere ciò più particolarmente in considerazione nel paragrafo seguente.

De' punti di regresso.

129. Allorchè una curva si arresta nel suo corso, e torna indietro, si ha un punto di regresso; il regresso è della prima specie, allorchè i due rami si
Fig. 33 volgono le loro convessità, come nella figura (33); ed essa è della seconda specie, allorchè le concavità sono concentriche come nella Fig. (34).

130. La curva si arresta così, perchè al di là del punto C di regresso, i valori che si danno all' ascissa, ne determinano degl' imaginarii per l' ordinata, ciocchè suppone che $\frac{d^2y}{dx^2}$ racchiude un radicale; e se, primacchè la curva sospende il suo corso, $\frac{d^2y}{dx^2}$ da due valori, uno dello stesso segno di y, e l' al-

tro di segno contrario, ciò dimostra che vi sono due rami (Fig. 33) di curva riuniti al punto C, l' uno convesso verso l' asse delle ascisse, e l' altro concavo. Con questi caratteri si può riconoscere un punto di regresso della prima specie: al contrario se i due valori di $\frac{d^2y}{dx^2}$ hanno lo stesso segno, i due rami che si uniscono in C (Fig. 34) non possono essere che concentrici: per conseguenza in questo caso il regresso sarà della seconda specie.

131. Per primo esempio, esaminiamo se vi sono punti di regresso nella curva che ha per equazione.

$$(y-x)^2 = x^9.$$

Questa equazione da

$$y = x + x^4\sqrt{x} \ldots (61).$$

Si vede che allorchè si prende x negativo, y diviene imaginario; dunque la curva si arresta all' origine, ove si ha $x=0$ ed $y=0$; ma ciò non dimostra ancora che nell' origine vi sia un punto di regresso, poicchè potrebbe non esservi in questo punto, che un arco di curva sempre concavo verso la stessa parte, come ha luogo al vertice dell' iperbole; perciò per conoscere se il valore di $x=0$ corrisponde ad un punto di regresso, bisogna sapere ciocchè diviene presso all' origine il coefficiente differenziale di second' ordine; or differenziando, e dividendo per dx la equazione

$$y = x \pm x^{\frac{9}{2}}, \text{ si ha}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 \pm \frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}} \ldots (62)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{9}{2}.\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} = \pm\frac{9}{2}.\frac{7}{2}x^2\sqrt{(x)}.$$

Per sapere se la curva è concava o convessa accanto al punto, ove sospende il suo corso, si aumenterà l'ascissa di questo punto di una piccola quantità h, con fare $x=0+h=h$, e con sostituire questo valore in quello di $\frac{d^2y}{dx^2}$; si troverà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{9}{2}\frac{7}{2}h^2\sqrt{h}:$$

Questi due valori di segno contrario indicano di
Fig.35 esservi due rami; uno AM (Fig. 35), che volge la sua convessità verso l' asse delle ascisse, e l' altro AN, che volge verso lo stesso asse la sua concavità; per conseguenza l'origine è un punto di regresso della prima specie.

132. Per secondo esempio, prendiamo l' equazione

$$(y-b)^2=(x-a)^3:$$

questa equazione ci da

$$y=b\pm\sqrt{(x-a)^3}\ldots(63).$$

Se si fa $x=a$, si trova $y=b$; ma se si danno ad x due valori minori di a, quelli di y diverranno imaginarii, poicchè mettendo $a-h$ in luogo di x, si trova

$$y=b\pm\sqrt{(-h^3)}=b\pm h\sqrt{(-h)},$$

valore imaginario: dunque la curva sospende il suo
Fig.33. corso al punto C (Fig. 33), le cui coordinate sono a, e b.

Per conoscere in qual modo i suoi rami si distendono al di là del punto C, sostituiscasi ad x il valore $a+h$ in quello di $\frac{d^2y}{dx^2}$; si avrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\pm\frac{3}{4\sqrt{h}}\ .$$ Fig.33.

Il segno superiore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ c' indica un ramo CM, che volge la sua convessità verso l' asse delle ascisse, el segno inferiore indica un ramo CN, che volge la sua concavità verso lo stesso asse: dunque vi esiste nel punto C un punto di regresso della prima specie.

133. Per terzo esempio, prendiamo la curva, la cui equazione è

$$y=ax^2\pm bx^2\sqrt{x}\ .$$

Se si fa $x=0$, si trova $y=0$; ma ad x negativo corrisponde un valore di y imaginario; dunque la curva sospende il suo corso all' origine; esaminiamo ciocchè diviene allora $\frac{d^2y}{dx^2}$. A tal oggetto, scrivendo l' equazione della curva nella maniera seguente

$$y=ax^2\pm b\,x^{\frac{5}{2}}\ ,$$

si avrà

$$\frac{dy}{dx}=2ax\pm\frac{5}{2}b\,x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2a\pm\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}b\sqrt{x}\ ;$$

dando ad x un valor positivo picciolissimo rappresentato da h, la parte $\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}b\sqrt{h}$ del valore di $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà minore dell' altra $2a$: per conseguenza i due valori di $\frac{d^2y}{dx^2}$ dati dall' equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \pm \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2} b\sqrt{h},$$

saranno positivi; d'onde ne segue che all'origine vi saranno due rami, i quali volgeranno la loro curvatura verso l'asse della x. Vi è dunque nell'origine un punto di regresso della seconda specie.

134. I punti di regresso appartengono ad una classe di punti conosciuti sotto il nome di *punti multiplici*.

De' punti multiplici.

135. Si chiamano *punti multiplici* i punti, ne' quali si riuniscono molti rami di curva. Un punto multiplice è doppio, allorchè esso è all' intersezione di due rami; è triplo, allorchè trovasi all' intersezione di tre rami; e così in seguito.

Fig.36 136. Sia A (Fig. 36) un punto doppio formato da due rami di curva AB, AC, a' quali siensi menate le tangenti AT, AT'. Se rappresentiamo con $F(x, y) = 0$ l' equazione della curva sgombra di radicali, il differenziale di questa espressione, messo sotto questa forma $Pdx + Qdy = 0$, non comprenderà alcun radicale, perchè la differenziazione di una funzione razionale non ne introduce punto in questa funzione; d'onde segue che P e Q saranno quantità razionali.

Ciò posto l' equazione precedente ci da

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} \dots (64).$$

Poichè $\frac{dy}{dx}$ dee avere due valori differenti, giacchè vi sono due tangenti, bisogna che $\frac{P}{Q}$ si de-termini in modo che abbia luogo questa condizione: essa avrebbe luogo, se $\frac{P}{Q}$ racchiudesse un radicale; ma ciò è una cosa impossibile, poicchè abbiamo veduto che $\frac{P}{Q}$ era razionale; in questo caso bisogna che l'Algebra ci guidi ad un risultamento, che eviti questa contradizione, ed è ciò che ha luogo, allorchè $\frac{P}{Q}$ si presenta sotto la forma $\frac{o}{o}$, perchè sappiamo che $\frac{o}{o}$ è il simbolo di una quantità indeterminata, e per conseguenza suscettibile di più valori.

137. Ecco in qual modo si dimostra questo teorema. Supponiamo per un istante che α ed α' rappresentino i due valori della tangente trigonometrica della curva al punto multiplice: questi valori dovranno soddisfare all' equazione

$$P+\frac{Q\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=o,$$

e daranno

$$P+Q\alpha=o \quad . \quad P+Q\alpha'=o$$

Queste due equazioni, tolta l' una dall' altra, danno

$$Q(\alpha-\alpha')=o:$$

Or il fattore $\alpha-\alpha'$, essendo composto di due quantità ineguali, non può esser nullo; d' onde segue che si ha $Q=o$; ciocchè riduce l' equazione $P+Q\alpha=o$ a $P=o$. Per mezzo di questi valori di P, e Q, l' equazione $P+Q\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=o$, o piuttosto $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{P}{Q}$ diviene

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}.$$

** 138. Se in luogo di due rami riuniti in un punto, ne abbiamo un più gran numero, basta di considerarne due solamente, per pruovare che al punto d'incontro di tutti questi rami, $\frac{dy}{dx}=0$: non si può giungere così facilmente alla stessa conseguenza allorchè molti rami di curva hanno una sola tangente comune: nondimeno in questo stesso caso, si può ancora dimostrare che $\frac{dy}{dx}$ debba presentarsi sotto la forma $\frac{0}{0}$; ma come la dimostrazione di questo teorema è fondata sulla considerazione de' contatti delle curve, noi ci riserbiamo di darla nell' art. (170), allorchè avremo parlato delle curve osculatrici **.

139. Si può osservare che la dimostrazione dell' art. 137 era fondata sulla condizione che l'equazione primitiva era sgombra de' radicali: se essa si differenziasse, senza di averli fatti prima scomparire, potrebbe avvenire che un' equazione la quale ammette de' punti multiplici non desse $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$. Per esempio l'equazione dell' art. 131 è in questo caso: essa ha un punto doppio all' origine; ed intanto se in essa si fa $x=0$, l'equazione (62) riducesi a $\frac{dy}{dx}=1$.

140. Infine aggiungeremo, che, benchè per un punto multiplice abbia luogo l'equazione $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$,

non ne segue però che questa equazione debba unicamente sussistere per un punto di questo genere, poicchè la dimostrazione precedente non ci dice affatto che questa proprietà sia loro esclusiva. Perciò quello che dee conchiudersene, è che la riduzione di

$\frac{dy}{dx}$ a $\frac{o}{o}$ indica solamente che può esservi luogo ad un punto multiplice.

141. Ciocchè precede basta per indicare il mezzo di conoscere se possono esservi de' punti multiplici in una curva determinata da una equazione. A tal oggetto sia V questa equazione; se ne dedurrà per mezzo della differenziazione, $Pdx + Qdy = o$, e si vedrà se gli stessi valori di x e di y soddisfacciano nel tempo stesso alla proposta, ed all' equazioni $P = o$, $Q = o$; se questo è, ciò sarà un indizio che questi valori di x e di y possono appartenere ad un punto multiplice, ed allora, esaminando la curva presso di questo punto, si conoscerà s'esso è multiplice.

De' punti conjugati.

142. Esaminiamo una curva tale, che nella parte, in cui le sue coordinate sono imaginarie, vi siano solamente due coordinate reali; queste coordinate costruiranno un punto, che sarà interamente distaccato dalla curva, ed a cui si è dato il nome di punto isolato, o di *punto conjugato.*

Rappresentiamo ora per mezzo di $y = fx$ l' equazione di una curva, che ha un punto conjugato. Se a, e b sono le coordinate di questo punto, bisognerà che almeno presso di esso, le coordinate siano imaginarie, altrimenti esso non sarà isolato: per conseguenza se supponiamo che l' ascissa a cresca di una piccola quantità h, l' ordinata corrispondente rappresentata da $(a+h)$, dovrà essere imaginaria; ora la serie di Taylor ci da, in generale

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{h^3}{2.3}+\text{ ec.}$$

Facendo $x=a$, bisognerà che l' ordinata corrispondente sia b; per conseguenza cambieremo y in b, e chiamando $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ ecc. ciocchè in questa ipotesi divengono i coefficienti differenziali, avremo

$$f(a+h)=b+\left(\frac{dy}{dx}\right)h+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{h^3}{2.3}+\text{ ecc.}$$

Or affinchè $f(a+h)$ sia una quantità imaginaria, bisogna almeno che una dell' espressioni

$\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ ecc. sia imaginaria;

cioè che l' ipotesi di $x=a+h$ renda imaginario uno de' coefficienti differenziali: se questa condizione ha luogo, la curva potrà avere un punto conjugato.

Per esempio, se si ha l' equazione

$$y=\pm(x+b)\sqrt{x};$$

differenziandola si troverà

$$\frac{dy}{dx}=\pm\left(\tfrac{3}{2}\sqrt{x}+\frac{b}{2\sqrt{x}}\right).$$

Questo valore divenendo imaginario, allorchè si fa $x=-b$, e per conseguenza $y=0$, dee presumersi
Fig. 37 che il punto A, (Fig. 37), le cui coordinate sono $x=-b$, ed $y=0$, è un punto conjugato: riconosceremo in seguito se questo punto è realmente conjugato, aumentando, e diminuendo successivamente l' ascissa $-b$ di una quantità più piccola di b, e

troveremo che ne' due casi, y diviene imaginario, il che annunzia che il punto in quistione è un punto conjugato.

143. I punti conjugati, come i punti multiplici, manifestano la loro esistenza, con ridurre il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$ a $\frac{0}{0}$. Infatti l'equazione

$$Q\frac{dy}{dx}+P=0$$

differenziata e divisa per dx, ci da

$$Q\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\frac{dQ}{dx}+\frac{dP}{dx};$$

e si vede che il termine affetto da $\frac{d^2y}{dx^2}$ ha Q per coefficiente; differenziando di nuovo, si troverà che Q è ancora il coefficiente di $\frac{d^3y}{dx^3}$, e così in seguito; in guisachè allorchè si sarà giunto al coefficiente dell' ordine n, si avrà un risultamento della forma

$$Q\frac{d^ny}{dx^n}+K=0\ldots(65),$$

Ciò posto, vi è almeno uno de' coefficienti differenziali, che diviene imaginario per un dato valore di x, e che per conseguenza contiene un radicale; rappresentando questo coefficiente con $\frac{d^ny}{dx^n}$, bisognerà che la funzione di x che rappresenta questa espressione, abbia più di un valore. Ciò basta per poter conchiudere, come nell' art. 137, che $Q=0$, ciocchè ridurrà l'equazione $P+Q\frac{dy}{dx}=0$, a $P=0$: segue da ciò che si dee avere $\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}$.

Delle curve osculatrici.

144. Siano $y=\varphi x$, $y=Fx$ l'equazioni di due curve, che s'incontrano al punto M (Fig. 11.) le cui coordinate siano $AP=x'$, $PM=y'$; per questo punto avrà luogo l'equazione

Fig. 11

$$\varphi x'=F x';$$

Supponiamo che x' divenga in seguito $x'+h$, l'equazioni precedenti daranno

$$M'P'=\varphi(x'+h)=\varphi x'+\frac{d\varphi x'}{dx'}h+\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{ecc.}\ (66).$$

$$M''P'=F(x'+h)=Fx'+\frac{dFx'}{dx'}h+\frac{d^2Fx'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{ecc.}\ (67).$$

Se tutt' i termini corrispondenti di questi sviluppi sono identici, le curve si confonderanno; se si ha solamente $Fx'=\varphi x'$, le curve non avranno che il solo punto M di comune, come abbiamo veduto; se di più si ha $\frac{dFx'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'}$, queste curve si ravvicineranno di vantaggio; ed anche di più, se, oltre queste equazioni, si ha benanche $\frac{d^2Fx'}{dx'^2}=\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}$, e così in seguito: poicchè egli è evidente che la differenza di M''P' da M'P', sarà tanto minore, quanto più grande sarà il numero de' termini eguali ne' di loro sviluppi.

Ciò posto, siano a, b, c, ecc. le costanti dell' equazione $y=\mathrm{F}x$; senza cambiare la natura della curva si possono dare de' valori arbitrarii a queste costanti: per esempio, se si ha l' equazione $y^2=mx+nx^2$, ch' è quella di un' ellisse, qualunque valore che si dia alle costanti m, n, questa equazione non cesserà di appartenere all' ellisse, poicchè l' equazione conserva sempre la stessa forma; ben inteso però che le costanti si facciano variare di valore, e non di segno, e che non si suppongano eguali a zero. Segue da questa osservazione, che possono riguardarsi come arbitrarie le costanti a, b, c, ec., le quali entrano nell' equazioni

$$\varphi x'=\mathrm{F}x', \quad \frac{d\varphi x'}{dx'}=\frac{d\mathrm{F}x'}{dx'}; \quad \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}=\frac{d^2\mathrm{F}x'}{dx'^2}; \text{ ecc.},$$

e prendendo tante equazioni, quante sono le costanti, queste si potranno determinare, dietro la condizione che soddisfacciano all' equazioni.

Per esempio, se l' equazione $y=\mathrm{F}x'$ non contiene che tre costanti a, b, c, si farà

$$\varphi x'=\mathrm{F}x', \quad \frac{d\varphi x'}{dx'}=\frac{d\mathrm{F}x'}{dx'}, \quad \frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}=\frac{d^2\mathrm{F}x'}{dx'^2}:$$

Si ricaveranno da quest' equazioni i valori di a,b,c in funzione di x', di y', di $\frac{dy'}{dx'}$ ecc., e si sostituiranno all' equazione $y=\mathrm{F}x$. Questa allora avrà tale proprietà, che sostituendo in essa $x+h$ in luogo di x, l' equazione (67) avrà i tre primi termini del suo secondo membro rispettivamente eguali a' tre primi del secondo membro dell' equazione (66).

Ciocchè si è detto di un' equazione che racchiude tre sole costanti, può applicarsi ad una che ne conterrebbe un più gran numero.

145. Sopponiamo, per esempio, che l' equazione $y=Fx$ rappresenti quella di una retta; essa sarà rimpiazzata dall' altra

$$y=ax+b \ldots (68).$$

L' equazioni di condizione necessarie per l' eliminazione delle costanti a, b, saranno

$$\varphi x'=ax'+b, \text{ o } y'=ax'+b \ldots (69),$$

$$\frac{d\varphi x'}{dx'}=a, \text{ o } \frac{dy'}{dx'}=a;$$

eliminando a, si otterrà

$$y'=\frac{dy'}{dx'}x'+b:$$

Da questa equazione se ne tira il valore di b, e sostituendo nell' equazione (68) questi valori di a, e di b, questa diverrà

$$y=\frac{dy'}{dx'}x+y'-\frac{dy'}{dx'}x',$$

la quale può mettersi sotto la seguente forma

$$y-y'=\frac{dy'}{dx'}(x-x') \ldots (70).$$

Si riconosce in questa equazione quella di una tangente MT (Fig. 3) menata dal punto M, in cui
Fig. 3 le coordinate sono x, y. Tosto vedremo, perchè questa retta MT è tangente in M.

146. Per evitare le perifrasi, conveniamo di denominare le curve per mezzo delle loro equazioni.

Abbiamo veduto, art. 144, che se le curve $y=\varphi x$, $y=\mathrm{F}x$ hanno solamente un punto comune, chiamando x' ed y' le coordinate a questo punto, si avrebbe l' equazione di condizione $\varphi x=\mathrm{F}x'$; ma che determinando due costanti dell' equazione $y=\mathrm{F}x$, per mezzo delle condizioni $\varphi x'=\mathrm{F}x'$, $\frac{d\varphi x'}{dx'}=\frac{d\mathrm{F}x'}{dx'}$, le le curve comincierebbero a ravvicinarsi.

Rappresentisi con $y=fx$ ciocchè diviene $y=\mathrm{F}x$, dopo avervi sostituito il valore di queste due costanti; la curva $y=fx$ sarà un' osculatrice di prim' ordine all' altra $y=\varphi x$, e se in virtù de' valori arbitrarii, che possono darsi alle costanti, se ne eliminino tre dall' equazione $y=\mathrm{F}x$, per mezzo delle condizioni 'seguenti

$$\mathrm{F}x=\varphi x',\ \frac{d\mathrm{F}x'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'},\ \frac{d^2\mathrm{F}x'}{dx'^2}=\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}\ldots (71);$$

e che rappresentisi con ψx ciocchè diviene $\mathrm{F}x$, dopo tale sostituzione, la curva $y=\psi x$ sarà un' osculatrice del second' ordine alla curva $y=\varphi x$, a cui si avvicinerà anche di più; e così in seguito, in guisa che per un' osculatrice dell' ordine *nnesimo* si avranno l' equazioni

$$\mathrm{F}x'=\varphi x',\ \frac{d\mathrm{F}x'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'},\ \frac{d^2\mathrm{F}x'}{dx'^2}=\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}\ldots$$

$$\frac{d^n\mathrm{F}x'}{dx'^n}=\frac{d^n\varphi x'}{dx'^n}\ (72).$$

147. Dimostriamo ora, che di due osculatrici ad una curva, facendo variare le costanti di una stessa equazione, quella ch' è di un ordine inferiore, non può passare tra l' altra e la curva medesima.

Per esempio, sia MB (Fig. 11) la curva $y=\varphi x$, Fig. 11

ed MC la sua osculatrice $y=\psi x$ di second' ordine; si dee dimostrare, che l'osculatrice $y=fx$ di prim'ordine non può passare tra le curve MB, MC.

A tal oggetto, sostituendo ad x, $x'+h$ in quest' equazione, si avrà

$$P'M'=\varphi(x'+h)=\varphi x'+\frac{d\varphi x'}{dx'}h+\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}$$

$$+\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

$$P'M''=\psi(x'+h)=\psi x'+\frac{d\psi x'}{dx'}h+\frac{d^2\psi x'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}$$

$$+\frac{d^3\psi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ecc.}$$

$$f(x'+h)=fx'+\frac{dfx'}{dx'}h+\frac{d^2fx'}{dx'^2}\frac{h^2}{1.2}$$

$$+\frac{d^3fx'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

La curva $y=\psi x$, essendo un' osculatrice di second ordine all' altra $y=\varphi x$, bisogna che sia

$$\psi x'=\varphi x',\ \frac{d\psi x'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'},\ \frac{d^2\psi x'}{dx'^2}=\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}.$$

Da un' altra parte essendo la curva $y=fx$ un' osculatrice di prim' ordine all' altra $y=\varphi x$, si ha ancora

$$fx'=\varphi x',\ \frac{dfx'}{dx'}=\frac{d\varphi x'}{dx'}:$$

Perció si avrà

$$\varphi x'=\psi x'=fx'$$

$$\frac{d\varphi x'}{dx'}=\frac{d\psi x'}{dx'}=\frac{dfx'}{dx'}$$

e solamente

$$\frac{d^2\varphi x'}{dx'^2}=\frac{d^2\psi x'}{dx'^2}:$$

facciasi, per render più semplici quell' espressioni

$$\varphi x'+\frac{d\varphi x'}{dx'}h=K$$

$$\frac{d^2\varphi x'}{2dx'^2}=V;$$

i tre sviluppi precedenti potranno scriversi così Fig. 12

$$PM'=\varphi(x'+h)=K+Vh^2+\frac{d^3\varphi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ecc.}$$

$$P'M''=\psi(x'+h)=K+Vh^2+\frac{d^3\psi x'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ecc.}$$

$$f(x'+h)=K+\frac{d^2fx'}{dx'}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3fx'}{dx'^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

e queste potranno mettersi sotto la seguente forma

$$\varphi(x'+h)=K+Vh^2+Mh^3$$

$$\psi(x'+h)=K+Vh^2+Nh^3$$

$$f(x'+h)=K+\frac{d^2fx'}{d'x'^2}\frac{h^2}{2}+Ph^3.$$

Le curve $y=fx$, ed $y=\psi x$ essendo osculatrici, una di prim' ordine, e l' altra di secondo, V differisce necessariamente da $\frac{d^2fx'}{2dx'^2}$. Dunque due ipotesi solamente si possano fare sopra V, cioè

$$V < \frac{d^2fx'}{2dx'^2}, \text{ o } V > \frac{d^2fx'}{2dx'^2}$$

Indichi Z la differenza di $\frac{d^2fx'}{dx'^2}$ e di V; si avrà nel primo caso

$$V+Z=\frac{d^2fx'}{2dx'^2};$$

e nel secondo

$$V-Z=\frac{d^2fx'}{2dx'^2};$$

sostituendo questo valore di $\frac{d^2fx'}{2dx'^2}$ in quella di $f(x'+h)$, ed osservando che h^2 è fattore comune ne' tre sviluppi qui sopra recati, essi diverranno

$$\varphi(x'+h)=K+(V+Mh)h^2$$

$$\psi(x'+h)=K+(V+Nh)h^2$$

$$f(x'+h)=K+(V+Z+Ph)h^2.$$

Or facendo h piccolissimo, egli è possibile che la quantità Z independente da h sia più grande dell' espressioni Mh, Nh, le quali tendono verso zero: In tal caso, se Z è positivo, $f(x'+h)$ sorpasserà $\varphi(x'+h)$
Fig. 11 e $\psi(x'+h)$: allora si ha $f(x'+h)$, o P'M''' maggiore di P'M', e di P'M'', il che dimostra che la curva $y=fx$ rappresentata da MM''' non può passare tra le due altre.

Se al contrario Z è negativa, si ha $f(x'+h)$ o P'M''' minore di P'M', e di P'M''. Allora essendo la curva MM''' quella che più si avvicina all' asse della x, non può essere compresa tra le due altre.

148. Ora si può render ragione del perchè la retta MT (Fig. 3) che abbiamo veduto nell' art. 117 essere un' osculatrice del primo ordine, è tangente alla curva; poicchè risulta da questa teorica, che tra la retta e la curva non può passarvi altra retta, ciocchè costituisce la proprietà della tangente.

Si dice che la tangente ha un contatto di prim'ordine colla curva. In generale, una osculatrice di un ordine n ha un contatto dallo stesso ordine colla curva, alla quale è osculatrice: perciò, allorchè tra due curve si hanno l' equazioni

$$\varphi x'=\mathrm{F}x',\ \frac{\mathrm{d}\varphi x'}{\mathrm{d}x'}=\frac{\mathrm{dF}x'}{\mathrm{d}x'},\ \frac{\mathrm{d}^2\varphi x'}{\mathrm{d}x'^2}=\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{F}x'}{\mathrm{d}x'^2},$$

queste curve hanno tra loro un contatto di second' ordine; e questo sarà di terzo ordine, se, oltre dell' equazioni precedenti si ha ancora $\frac{\mathrm{d}^3\varphi x'}{\mathrm{d}x'^3}=\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{F}x'}{\mathrm{d}x'^3}$, e così in seguito.

149. L' equazione del cerchio

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2$$

comprendendo tre costanti, possiamo determinare il cerchio, che ha un contatto di second' ordine con una curva MB (Fig. 14), di cui si ha l' equazione. Fig. 14
A tal oggetto siano x', y', le coordinate del cerchio al punto M; si avrà

$$(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2=\gamma^2 \ldots (73),$$

ed y' dovrà rimpiazzare $\mathrm{F}x'$ nell' equazioni del contatto che sono

$$\varphi x'=\mathrm{F}x',\ \frac{\mathrm{d}\varphi x'}{\mathrm{d}x'}=\frac{\mathrm{dF}x'}{\mathrm{d}x'},\ \frac{\mathrm{d}^2\varphi x'}{\mathrm{d}x'^2}=\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{F}x'}{\mathrm{d}x'^2};$$

se nello stesso tempo adottiamo x', ed y' per le coordinate della curva $y=\varphi x$ al punto di contatto, l' equazioni precedenti diverranno

$$y=y',\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dx'},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dx'^2}\ldots(74);$$

bisognerà dunque sostituire alle quantità y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{d^2x'}$ i di loro rispettivi valori tirati dall' equazione (73), e da' suoi differenziali successivi, i quali sono

$$(y'-\beta)\frac{dy'}{dx'}+(x'-\alpha)=0\ldots.(75)$$

$$(y'-\beta)\frac{d^2y'}{dx'^2}+\frac{dy'^2}{dx'^2}+1=0\ldots.(76)$$

Or sostituire nell' equazioni (74) i valori di y', $\frac{dy'}{dx'}$, $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ che si ottengono dall' equazioni (73), (75), (76), non è altro ch' eliminare queste stesse quantità tra l' equazioni (73), (75), (76); togliendo dunque gli accenti, si avrà

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2\ldots(77)$$

$$(y-\beta)\frac{dy}{dx}+(x-\alpha)=0\ldots(78)$$

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy^2}{dx^2}+1=0\ldots(79)$$

Da questa ultima equazione si ottiene

$$y-\beta=-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ldots.(80);$$

Mettendo questo valore nell' equazione (78), si ottiene

$$x-\alpha=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}\,\frac{dy}{dx}\ \ldots\ (81):$$

Sostituendo questi valori di $y-\beta$, di $x-\alpha$ nell' equazione (77), si avrà

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}+\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\,\frac{dy^2}{dx^2}=\gamma^2;$$

questa equazione riducesi a

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=\gamma^2;$$

ed estraendone la radice quadrata; si avrà

$$\pm\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\gamma.$$

150. Il doppio segno è relativo alla posizione di γ: se la curva volge la sua concavità all' asse delle x, $\frac{d^2y}{dx^2}$ sarà negativo; e sostituito nel valore

$$\gamma=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\ \ldots\ (82).$$

lo renderà positivo.

151. Si è dato il nome di cerchio osculatore a **quello** che qui sopra abbiamo esaminato, ed al suo raggio quello di raggio di curvatura, o di raggio d' *osculo*: duque per ottenere il raggio di curvatura, bisognava dedurre dall' equazione della curva i coefficienti differenziali necessarii all' uopo, e sostituirli nella formola (82).

Se la curva dovesse volgere la sua convessità all' asse delle x, metteremo il segno positivo innanzi al valore di γ.

152. ** Il valore di γ qualche volta si scrive così

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}:$$

Questa formola si deduce facilmente dall' eqnazione (82); poichè riducendo allo stesso denominatore i due termini, che sono sotto la parentesi, ed osservando che la potenza $\frac{3}{2}$ di dx^2 è dx^3, si otterrà

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3\,\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}. \;**$$

153. Per dare un' applicazione della formola (82), cerchiamo il raggio di curvatura della parabola MDN
Fig. 6 (Fig. 6), la cui equazione è $x^2=my$; si troverà

$$2x\,dx = m\,dy,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{m};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{m};$$

dunque si avrà

$$\gamma = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left(1+\frac{4x^2}{m^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{m}}$$

$$= \frac{\left[\frac{4}{m^2}\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{m}}$$

$$=\frac{\frac{8}{m^3}\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{m}}=\frac{\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{m^2}{4}}\ \dots\ (83):$$

Or la normale della parabola avendo per espressione $\left(\frac{m^2}{4}+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$, si vede che il raggio di curvatura della parabola è eguale al cubo della normale diviso pel quadrato del semiparametro.

154. Il cerchio osculatore può servire a misurare la curvatura della curva in un punto M (Fig. 11): poicchè se in questo punto M si descriva col raggio di curvatura un arco piccolissimo MC, questo potrà esser considerato come lo stesso arco della curva, da cui si allontana pochissimo: or quanto più curvo è l'arco MC, tanto più piccolo sarà il suo raggio; d'onde segue *che il raggio di curvatura è in ragione inversa della curvatura della curva.*

Per esempio, considerando l'equazione (83), che da il raggio di curvatura della parabola, si vede che al vertice della curva, in cui si ha $x=o$, è $\gamma=\frac{m}{2}$; ma che γ aumenta, allorchè x cresce successivamente; il che annunzia che la curvatura della parabola va diminuendo coll'allontanarsi dal vertice.

155 La quantità $\frac{dy}{dx}$ esprimendo la tangente trigonometrica dell'angolo, che la tangente fa in M' coll'asse delle ascisse, (Fig. 4), l'equazione della normale, che si tira da un punto, in cui le coordinate sono α, β, sarà

$$y-\beta=-\frac{dx}{dy}(x-\alpha):$$

Questa essendo la stessa dell' equazione (78), nella quale α, β sono le coordinate del centro del cerchio osculatore, si vede che il raggio di questo cerchio è una normale alla curva.

156. Se ora per tutt' i punti della curva MM'M''M'''
Fig. 12 (Fig. 12), si menino de' raggi di curvatura MO, M'O', M''O'' ec. si costruirà una serie di punti O,O',O'' ec.; facendo dipendere questi punti da una certa legge *, ciò basta a poter dare il nome di curva al nostro sistema: ma non pronunzieremo ancora cos' alcuna sulla natura di questa nuova curva, che chiamasi l' evoluta della curva MM'M'': questa relativamente all' evoluta vien chiamata *evolvente*.

157. Se si passa da un punto all' altro dell' evoluta, non solamente x ed y variano, ma ancora α. β e γ variano nello stesso tempo, poicchè α, β essendo in generale le coordinate al centro del cerchio osculatore, come l' evoluta è formata dal sistema di questi centri, ne risulta che α, β sono le coordinate dell' evoluta, coordinate, che debbono variare da un punto della curva all' altro. Lo stesso è di γ, ch' è il raggio del cerchio osculatore, e che allora rappresenta la distanza di un punto qualunque dell' evoluta, da un punto dell' evolvente, d' onde parte γ. Per conseguenza differenziando l' equazione (78), per rispetto a tutte le lettere **, e dividendo per dx, si avrà

$$(y-\beta)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{dx}+1-\frac{d\alpha}{dx}=0;$$

* Questa è implicitamente contenuta nell' equazione della curva MM'M'', poicchè data questa curva, ne risulta la posizione de' suoi punti.

** L' equazione $(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2$, e le sue derivate non possono essere differenziate diversamente; in-togliendo da questa l'equazione (79), rimane

$$-\frac{dy}{dx}\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dx}=0\ ,$$

da cui si ottiene

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\beta}{dx}}=-\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{d\beta}{dx}}\ ;$$

ora abbiamo art. 67.

$$\frac{1}{\frac{d\beta}{dx}}=\frac{dx}{d\beta}\ ;$$

dunque sarà

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{dx}{d\beta}\ ;$$

e per conseguenza, art. 24.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{d\alpha}{d\beta}\ ;$$

Se questo valore di $\frac{dy}{dx}$ si sostituisca nell'equazione (78), si otterrà

$$y-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)\ldots.(84).$$

---

tanto sembra che tutt' altro si è fatto, allorchè abbiamo dedotte l' equazioni (75) e (76) dall' equazione (73). Potrà rispondersi, che come nell' equazione (73) vi erano due costanti arbitrarie, esse sono state determinate dietro la condizione, che fossero nulle le funzioni rappresentate da' primi membri dell' equazioni (75) e (76); ma senza ciò, da che l' equazione (73) ha luogo, non si sarebbe potuto conchiudere che dovessero ben anche aver luogo l' equazioni (75), e (76).

158. Abbiamo veduto, art. 155, che l' equazione

$y-\beta=-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}(x-\alpha)$, era quella del raggio osculatore, che passava pel punto segnato per mezzo delle

coordinate x, y: mettendo $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}$ in luogo di $-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$, essa sarà sempre l' equazione dello stesso raggio: ma l' equazione (84) è quella benanche di una tangente menata dal punto dell' evoluta, in cui le coordinate sono α, β *; dunque il raggio di curvatura è tangente all' evoluta.

159. Come nella dimostrazione seguente noi impiegheremo il differenziale di un arco di curva, perciò anderemo a determinare questo differenziale.

Supponiamo che un' ascissa AP$=x$, (Fig. 3) cresca di PP'$=h$, se meniamo la parallela MQ all' asse delle x, avremo evidentemente

$$\text{corda } MM'=\sqrt{(MQ^2+QM'^2)}=\sqrt{(h^2+QM'^2)};$$

$$\text{ora } M'Q=f(x+h)-fx=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}h+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{2}+\text{ec.};$$

Sicchè sostituendo questo valore nell' espressione di MM', e rapprerentando con A e B i rispettivi coefficienti di h^3, di h^4; si avrà

---

* Osservisi ch' essendo in generale α, e β le coordinate di un punto qualunqne dell' evoluta, l' equazione di questa sarà $\beta=f\alpha$; dunque $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\alpha}$ rappresenta, art. 71, l' angolo che fa la tangente coll' asse delle ascisse al punto α, β.

$$MM' = \sqrt{(h^2 + \frac{dy^2}{dx^2}h^2 + Ah^3 + Bh^4 +) \text{ ecc.}}, \text{ o}$$

$$MM' = \sqrt{[h^2(1 + \frac{dy^2}{dx^2}) + Ah^3 + Bh^4 +] \text{ ecc.}};$$

dunque sarà

$$\frac{MM'}{h} = \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + Ah + Bh^2 + \text{ecc.})}$$

Nel caso del limite, la corda si confonde coll' arco, che rappresenterò con s, in guisa che avremo

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})};$$

d' onde si otterrà, moltiplicando per dx

$$ds = (\sqrt{dx^2 + dy^2}).$$

160. Per l' evoluta, le cui coordinate sono α e β, si avrà egualmente

$$ds = \sqrt{(d\alpha^2 + d\beta^2)}.$$

161. Differenziamo ora l' equazione (77) per rispetto a tutte le lettere; si avrà

$$(y-\beta)(dy-d\beta) + (x-\alpha)(dx-d\alpha) = \gamma d\gamma;$$

l' equazione (78) ci da

$$(y-\beta)dy + (x-\alpha)dx = 0;$$

togliendola dall' equazione precedente, si avrà

$$-(y-\beta)\,d\beta - (x-\alpha)d\alpha = \gamma d\gamma \ldots (85):$$

Se in questa equazione, e nell' altra (77) sostituiscasi il valore di $y-\beta$ dato dall' equazione (84), troveremo queste due equazioni

$$-\frac{d\beta^2}{d\alpha}(x-\alpha) - (x-\alpha)d\alpha = \gamma d\gamma$$

$$\frac{d\beta^2}{d\alpha^2}(x-\alpha)^2+(x-\alpha)^2=\gamma^2,$$

ossia

$$-(x-\alpha)(\frac{d\beta^2+d\alpha^2}{d\alpha}=\gamma d\gamma$$

$$(x-\alpha)\frac{\sqrt{(d\alpha^2+d\beta^2)}}{d\alpha}=\gamma\,;$$

dividendo la prima di queste due equazioni per la seconda, si avrà

$$d\gamma=-\sqrt{(d\alpha^2+d\beta^2)}:$$

Or si è veduto, (art. 160), che, chiamando s un arco dell' evoluta, si avea

$$ds=\sqrt{(d\alpha^2+d\beta^2)};$$

sicchè sarà

$$d\gamma=-ds\,,\ \text{o}\ d(\gamma+s)=0:$$

e come ogni funzione, il cui differenziale è nullo, è costante, sarà perciò $\gamma+s=costante$; dunque se il raggio di curvatura cresce, bisogna che s diminuisca di altrettanto, ciocchè si accorda con ciocchè abbiamo veduto.

Questa proposizione si annuncia così; *il raggio di curvatura varia per la stesse differenze dell' evoluta*.

162. Siano (Fig. 12) $MO=\gamma$, $OB=s$; $M'O'=\gamma'$, $O'B=s'$; pel raggio osculatore MO si avrà

$$\gamma+s=costante,\ \text{o}\ MO+\text{arco}\ OB=costante\ldots(86);$$

e per l' altro M'O'

$$\gamma'+s'=costante\,,\ \text{o}\ M'O'+O'B=costante\ldots(87):$$

i secondi membri dell' equazioni (86) e (87) rappresentando una stessa costante; ne dedurremo

$$MO+\text{arc}OB=M'O'+\text{arc}O'B;$$

e perciò

$$M'O'-MO=\text{arc}OB-\text{arc}O'B=\text{arc}OO';$$

cioè *la differenza di due raggi osculatori è eguale all' arco ch' è tra essi*;

163. Segue da ciò che se sull' evoluta OB si applica un filo, che essendo tangente in O, sia fissato al punto M della evolvente MC; allorchè questo filo si svilupperà, tenendolo costantemente teso, la sua estremità M descriverà in questo movimento l'evoluta MC; poicchè supponendo che in questo movimento sia giunto in una posizione O'M', si sarà accresciuto di OO', e perciò eguaglierà in lunghezza il raggio di curvatura, che passa pel punto O': dunque l' estremità M' di questo filo sarà sull' evolvente.

164. Ecco in qual modo può trovarsi l' equazione dell' evoluta: 1.° dall' equazione della curva si prenderanno i valori di y, e de' coefficienti differenziali

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ecc, secondo l'ordine del contatto; 2.° si

sostituiranno questi valori nell' equazioni (78) e (79), il che darà due nuove equazioni, che saranno funzioni di x; 3.° eliminando x tra queste equazioni, si arriverà ad una equazione tra α e β. Questa sarà quella dell' evoluta.

165. Determiniamo con questo metodo l' evoluta della parabola, che ha per equazione $x^2=my$ *; differenziando si trova

$$2x\,dx=m\,dy,$$

e perciò

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{m},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{m};$$

sostituendo nell' equazioni (78), e (79) questi valori di y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. queste diverranno

$$\left(\frac{x^2}{m}-\beta\right)\frac{2x}{m}+x-\alpha=0\ldots(88)$$

$$\left(\frac{x^2}{m}-\beta\right)\frac{2}{m}+\frac{4x^2}{m^2}+1=0\ldots(89)$$

togliendo l' equazione (88) dall' altra (89) moltiplicata per x, si avrà

$$\alpha+\frac{4x^3}{m^2}=0\ldots(90):$$

Da' un' altra parte l' equazione (89) moltiplicata per m^2, e ridotta, ci da

$$6x^2-2m\beta+m^2=0.$$

da cui si ha

$$\beta=\frac{6x^2+m^2}{2m}=\frac{3x^2}{m}+\frac{m}{2}\ldots(91);$$

eliminando x tra l'equazione (90), e (91), si avrà l'equazione dell' evoluta. Ma prima di ciò fare, osservisi che per l' origine, ov' è $x=0$, l' equazioni (90) e (91) riduconsi ad $\alpha=0$, $\beta=\frac{m}{2}$; prendendo dunque $DB=\frac{m}{2}$,
Fig. 6 (Fig. 6), si ha il punto B dell' evoluta; dippiù l' equazione (91) ci fa comprendere, che dando ad x de' valori positivi o negativi, β aumenta a misura che questi valosi crescono, d' onde segue che l' evoluta si compone di due rami BC, BC'.

166. Per eliminare x tra l' equazioni (90), e (91), la prima elevata a quadrato, da

$$x^6=\frac{\alpha^2m^4}{16};$$

da un' altra parte dall' equazione (91) si ottiene

$$x^2=(\beta-\frac{m}{2})\frac{m}{3};$$

elevando a cubo i due membri di questa equazione, si ha

$$x^6=(\beta-\frac{m}{2})^3\frac{m^3}{27};$$

eguagliando questi due valori di x^6, e dividendo per m^3 si avrà

$$\frac{\alpha^2 m}{16}=(\beta-\frac{m}{2})^3\frac{1}{27}:$$

chiamisi β' la quantità $\beta-\frac{m}{2}$ e moltiplicando per 27, si avrà

$$\beta'^3=\frac{27}{16}m\alpha^2=n\alpha^2\ *$$

facendo $\frac{27}{16}m=n$: l' origine si trasporta allora in B, poichè $\beta'=\beta-\frac{m}{2}$.

167. Una osculatrice (Fig. 13) può essere situata in due Fig. 13

---

* È facile il dimostrare che i rami BC, BC' si voltino le loro convessità; poichè differenziando l' equazione $\beta'^3=n\alpha^2$, si trova

$$\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}=-\frac{2}{9}n^{\frac{1}{3}}\alpha^{-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{9}\sqrt[3]{\frac{n}{\alpha^4}},$$ valore negativo tanto per α positivo, che per α negativo; ciocchè pruova che ogni ramo della curva rivolga la sua concavità all' asse delle x.

maniere differenti rispetto alla curva, colla quale è in contatto; 1.° essa può avere i suoi due rami tut-
Fig. 15 ti due al di sopra della curva, come nella (Fig. 15),
Fig. 14 o tutti due al di sotto, come nella (Fig. 14); allora l' osculatrice non farà che toccare la curva; 2.° l' osculatrice può avere un ramo al di sopra del-
Fig. 11 la curva, e l'altro al di sotto, come nella (Fig. 11): in tal caso l' osculatrice taglierà la curva in M.

Fig. 16 168. Andiamo a dimostrare (Fig. 16), che il cerchio osculatore tagli la curva.

Siano per una stess' ascissa $x+h$.

Y l' ordinata della curva

Y' l' ordinata dell' osculatrice.

Si ha dunque

$$\left.\begin{aligned} Y&=\varphi(x'+h)=\varphi x'+Ah+Bh^2+Ch^3+\text{ec.} \\ Y'&=F(x'+h)=Fx'+A'h+B'h^2+C'h^3+\text{ec.}\end{aligned}\right\}\ldots(92)$$

Or poicchè il cerchio è un' osculatrice di second' ordine, i tre primi termini di questi sviluppi saranno gli stessi; dunque la differenza delle ordinate, che corrisponde ad $x+h$ sarà

$$(C-C')h^3+\text{ecc.}\ldots.(93).$$

Supponiamo ora che l' ascissa divenga $x-h$, bisognerà cambiare h in $-h$ nella differenza delle ordinate il che darà

$$-(C-C')h^3+\text{ecc.}\ldots(94).$$

Or come il primo termine delle serie (93) e (94) può sorpassare la somma di tutti gli altri, prendendo h assai piccolo, ne risulta che la differenza delle ordinate cambierà di segno, allorchè l' ascissa sarà $x-h$ invece di $x+h$: perciò prendendo (Fig. 16) $PP''=PP'=h$, se la differenza delle ordinate corrispondenti ad $x+h$ è una quantità positiva; cioè se l'ordinata P'M' della curva sorpassa P'N', l'ordinata P"N" dell'osculatrice sorpasserà l'altra P"M" della curva; d'onde si conchiuderà, che l'osculatrice da una parte è al di sopra della curva, e dall'altra al di sotto, e che perciò la taglia.

Ciocchè dicesi del cerchio, ch'è un'osculatrice di second'ordine, può applicarsi ad ogni osculatrice d'ordine pari.

169. Se l'osculatrice fosse di un ordine impari, toccherebbe solamente la curva in vece di tagliarla; il che è evidente dietro la precedente dimostrazione.

** 170. Ecco il teorema che abbiamo promesso di dimostrare nell'art.(138) sopra i punti moltiplici. Se le curve, che si riuniscono in uno di questi punti, hanno una tangente comune, la cui equazione sia rappresentata da $ax+b$, cambieremo Fx in $ax+b$, nella seconda dell'equazione (92), ciocchè darà $\frac{dFx}{dx}$, o $A'=a$, e tutti gli altri coefficienti di questa equazione saranno nulli. La tangente, essendo una osculatrice del primo ordine, $\varphi x+Ah$ eguaglierà $Fx+A'h$, ciocchè ridurrà la differenza dell'equazioni (92) ad $Y-Y'=Bh^2+Ch^3+$ ec. Fig. 13

Questa differenza delle ordinate, dovendo avere un valore doppio QM, QM' (Fig. 13), bisogna che uno de' coefficienti differenziali rappresentati da B, C ecc., abbia due valori.

Sia $\frac{d^n\varphi x}{dx^n}$ questo coefficiente; se si prendano i differenziali successivi dell'equazione $Pdx+Qdy=0$, abbiamo veduto, art. 143, che in ogni differenziazione, il termine Q resta sempre fattore del differenziale dell'ordine più elevato di y; di sorta che il differenziale dell'ordine n della funzione proposta potrà essere rappresentato da $Q\frac{d^ny}{dx^n}+K=0$: dovendo

$\frac{d^n y}{dx^n}$ avere due valori, si dimostrerà, come nell' (art. 137), che Q è nullo. Questo valore di Q ridurrà quello di P a zero; d'onde segue che l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q}, \text{ darà } \frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.**$$

SVILUPPO DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI

Applicazione del Teorema di Taylor allo sviluppo delle funzioni di due variabili, che ricevono degli accrescimenti.

171. Allorchè in una funzione u di due variabili indipendenti x, y, si cambia x in $x+h$, ed y in $y+h$, il teorema di Taylor può darci lo sviluppo di questa funzione. Infatti se si metta primieramente $x+h$ in luogo di x, si avrà

$$f(x+h,y)=u+\frac{du}{dx}h+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.}\ldots(95);$$

in questo sviluppo essendovi h, y non può essere contenuto che nelle funzioni u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$ ec.

Cambiando dunque y in $y+k$ in queste funzioni, la u sarà rimpiazzata nell'equazione (95) da

$$u+\frac{du}{dy}k+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{2.3}+\text{ec.};$$

la $\frac{du}{dx}$ da $\frac{du}{dx}+\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}k+\frac{d^2\frac{du}{dx}}{dy^2}\frac{k^2}{2}$

$$+\frac{\mathrm{d}^3\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}^3y}\,\frac{k^3}{2.3}+\text{ec.}$$

$$\text{la }\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\text{ da }\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\quad\frac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}y}\,k+\frac{\mathrm{d}^2\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}y^2}\,\frac{k^2}{2}$$

$$+\frac{\mathrm{d}^3\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}}{\mathrm{d}y^3}\,\frac{k^3}{2.3}+\text{ecc.}$$

ecc. ec.

E formando tante linee, quanti termini vi sono nell' equazione (95), otterremo

$$f(x+h+y+k)=\left.\begin{aligned}&u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}k+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{2}+\text{ec.}\\&+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h+\frac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}y}hk+\text{ecc.}\\&+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{2}+\text{ecc.}\\&+\text{ecc.}\end{aligned}\right\}\cdots(96)$$

172. Se si fossero fatte le sostituzioni in un ordine inverso, si sarebbe in primo luogo trovato, cambiando y in $y+k$

$$f(x,y+k)=u+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}k+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\frac{k^2}{2}+\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}\frac{k^3}{2.3}+\text{ecc.};$$

e mettendo in seguito in ogni termine $x+h$ in luogo di x, si sarebbe giunto a questo sviluppo

$$f(y+k\,,\,x+h)=u+\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}h+\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\dfrac{h^2}{2}+\text{ecc.}\\[2ex] +\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}k+\dfrac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}}{\mathrm{d}x}hk+\text{ecc.}\\[2ex] +\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\dfrac{k^2}{2}+\text{ecc.}\\[1ex] +\text{ecc.}\end{array}\right\}\ldots(97)$$

Essendo arbitrario l'ordine, col quale abbiamo fatto queste sostituzioni, poichè dovendo mettere $x+h$ ovunque entra x, ed $y+h$ ovunque entra y, queste operazioni non possono influire l'una sull'altra; ne segue che i due sviluppi (96, e 97) debbano essere identici, e che perciò i termini affetti dagli stessi prodotti di h e di k hanno gli stessi valori: dunque se noi eguagliamo i termini moltiplicati pes hk, otterremo

$$\frac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}}{\mathrm{d}x},\ \text{o piuttosto}\ \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y\mathrm{d}x}.$$

Questa equazione c' insegna che per prendere il secondo differenziale del prodotto di due variabili, è arbitrario l'ordine delle differenziazioni. La stessa cosa si dimostrerebbe pe' coefficienti differenziali degli ordini superiori, eguagliando tra loro i cofficienti differenziali degli altri termini dell'equazioni (96 e 97).

De' massimi e minimi nelle funzioni di due variabili.

** 173. Abbiamo veduto, (art. 171), che se in una funzione di due variabili indepeudenti x, y si metteva $x+h$ in luogo di x, ed $y+h$ in luogo di y, lo sviluppo $f(x+h, y+k)$ si avea dall' equazione (96). Se in questa equazione rappresentisi $f(x+h, y+k)$

con U, k con mh, e $\frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}y}$ da $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$, avremo

$$U=u+h\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}m+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+\frac{1}{2}h^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}m^2+\right.$$

$$\left.2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}m+\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)+\textit{termini in } h^3 \text{ ecc.} \ldots (98).$$

Affinché u sia un massimo o un minimo, bisogna che U sia sempre più grande o più piccolo di u, qualunque valore diasi agli accrescimenti h e k; or ciò non è possibile, che quando è nullo il termine

$h\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}m+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)$, poicchè se ciò non fosse, questo termine, (art 89), potendo divenire più grande della somma algebrica di tutti gli altri che seguono, mediante un convenevole valore di h; prendendo successivamente questo valore negativo e positivo, si farebbe, in uno de' casi, U più grande, e nell' altro più piccolo di u; perciò, affinchè la funzione u sia un massimo o un minimo, bisogna che si abbia

$$h\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}m+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=0,$$

o piuttosto

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}m+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0.$$

Essendo arbitrario l' accrescimento k, lo stesso dee essere m; per conseguenza questa equazione ha luogo, qualunque sia il valore di m, ciocchè esige ch'essa si divida nelle due seguenti

$$\frac{du}{dy}=0,\ \frac{du}{dx}=0.$$

174. Esaminiamo ora ciocchè distingue il massimo dal minimo. A tal oggetto osserviamo, ch' essendo nullo il termine ov' è h, è l'altro in h^2 che dee decidere del segno della somma algebrica di tutti quelli che seguono u; bisogna dunque che il termine ov' è h^2, se non è zero, abbia sempre lo stesso segno, per qualunque valore di h e k; giacchè se, per de' differenti valori di h e k, potesse esser or positivo, or negativo, U potrebbe essere, in un caso più piccolo, ed in un altro più grande di u; perciò andremo a cercare la condizione che dee aver luogo, affinchè il termine in h^2 conservi sempre lo stesso segno, qualunque siano i valori che si danno ad h ed a k. Con questa veduta, rappresentiamo il termine in h^2 dell'equazione (98) con

$$\frac{1}{2}h^2(Am^2+2Bm+C);$$

mettendo A per fattore comune, questo termine diverrà

$$\frac{1}{2}Ah^2\left(m^2+2\frac{B}{A}m+\frac{C}{A}\right)\ldots(99);$$

aggiungiamo dentro le parentesi la quantità identicamente nulla $\frac{B^2}{A^2}-\frac{B^2}{A^2}$, l' espressione (99) potrà scriversi così

$$\frac{1}{2}Ah^2\left[\left(m+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{C}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right]\ldots(100);$$

e si vede ch' essa avrà sempre lo stesso segno di A, se avendo A e C lo stesso segno, si ha $\frac{C}{A} > \frac{B^2}{A^2}$, cioè $AC > B^2$; poicchè allora la quantità moltiplicata da $\frac{1}{2}Ah^2$ sarà essenzialmente positiva, el segno dell' espressione (100) dipenderà da quello di A, in guisacchè si avrà un massimo o un minimo, secondocchè A sarà negativo o positivo, cioè secondo il segno di $\frac{d^2u}{dy^2}$, ch' è lo stesso di $\frac{d^2u}{dx^2}$, perchè si è veduto che C ed A si erano supposti essere dello stesso segno **.

Della trasformazione delle coordinate rettangolari in coordinate polari.

175. Esaminiamo una curva BDC (Fig. 38), nella quale siasi determinato il sito di un punto M, mediante le coordinate rettangolari $AP = x$, $PM = y$; questo punto può esser egualmente determinato, mediante l' angolo MAC, el raggio vettore AM; ma come ordinariamente gli angoli si misurano cogli archi, perciò in luogo dell' angolo MAC, metteremo l' arco *mo*, descritto con un raggio preso per unità; perciò chiamando t quest' arco *mo*, ed u il raggio vettore AM, potremo sostituire il sistema delle coordinate polari t ed u a quello delle coordinate rettangolari $AP = x$, e $PM = y$. Fig.38

176. Bisogna osservare che l' origine delle ascisse è qualche volta situato in un luogo diverso da *o*, poicchè il punto M è egualmente determinato, allorchè dopo aver preso un punto *o'* per origine, sia dato l' arco *o'm*, el raggio vettore AM; in questo caso pos-

siamo rappresentare $o'm$ con t', ed allora tutte le ascisse contate dall' origine o', differiranno dalle ascisse contate dall' origine o, per una quantità costante oo', e vi sarà fra esse la seguente relazione

$$t=t'-oo'.$$

Poicchè per mezzo di questa relazione, si può sempre cambiare di origine nel modo che conviene, supporremo, per maggiore semplicità, l' origine in o.

177. Rappresentiamo ora con $F(x,y)=o$ l' equazione, nella quale vogliamo cambiare le coordinate rettangolari $AP=x$ e $PM=y$, in coordinate polari $om=t$, od $AM=u$, e cerchiamo le relazioni ch' esistono tra queste coordinate; avremo evidentemente

$$AP=AM\cos MAP,\quad PM=AM\,\mathrm{sen}\,MAP,$$

o

$$x=u\cos t\qquad, y=u\,\mathrm{sen}\,t \ldots (101):$$

Basterebbe dunque di sostituire questi valori nell' equazione rappresentata da $F(x,y)=o$; per ottenere quella che sarebbe rapportata a delle coordinate polari.

178. Se l' origine delle coordinate rettangolari x,y
Fig.39 non è al centro A della curva (Fig. 39), siano x',y' le coordinate contate dall' origine A', ed a, b le coordinate contate dal centro A, si avrà

$$AP=A'Q-A'B,\quad MP=MQ-AB$$

o

$$x=x'-a\qquad y=y'-b,$$

valori che si sostituiranno nelle formole precedenti.

Della trasformazione delle coordinate polari in coordinate rettangolari, e determinazione dell' espressione differenziale dell' arco in una curva polare.

179. Se una equazione rapportata a delle coordinate polari sia rappresentata da $F(t,u)=o$, si vede

(Fig. 38) che u può essere rimpiazzato dal suo valore tirato dall' equazione

$$AM^2 = AP^2 + PM^2 \text{, o}$$

$$u^2 = x^2 + y^2 \ldots (102):$$

Rispetto a t, l' equazioni (101) divise l' una per l' altra, ci danno

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{sen}t}{\cos t} = \text{tang}\, t,$$

da cui si ha

$$t = \text{arc}(\text{tang} = \frac{y}{x}).$$

Questo valore di t e quello di u sostituiti nell' equazione $F(t,u)=o$, si ha

$$F\, \text{arc}\,(\text{tang} = \frac{y}{x}), \sqrt{(x^3+y^2)}] = o \ldots (103).$$

Così si perviene ad una equazione tra x ed y, ed affetta da una quantità trascendente.

180. Si può ancora ottenere tra x ed y un' equazione, che non contenga la trascendente $\text{arc}(\text{tang} = \frac{y}{x})$, ma che racchiuda de' differenziali: a tal oggetto, si differenzierà l' equazione rappresentata dalla formola (103), o, come si pratica, s' impiegherà il seguente metodo, per arrivare a questo scopo. Rappresentiamo sempre per mezzo di $F(u,t)=o$ l' equazione che si tratta di trasformare in una funzione di coordinate rettangolari x ed y; abbiamo veduto (art. 179), che il valore di u potea esprimersi con x ed y, senza quantità trascendente, ma che non era lo stesso di t; perciò cercheremo primieramente eliminare t tra $F(t,u)=o$, el differenziale di questa equazione, che rappresentere-

mo con $F(t, u\mathrm{d}t, \mathrm{d}u)=o$; in verità noi introdurremo nel risultamento dell' eliminazione, i differenziali $\mathrm{d}t$, e $\mathrm{d}u$; ma questi potranno esprimersi in funzione delle variabili x, y, $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$. In fatti, l' equazioni (101) ci danno

$$\cos t=\frac{x}{u}\;,\;\; \mathrm{sen}\, t=\frac{y}{u} \ldots (104)\;;$$

dividendo l' una di queste equazioni per l' altra, si ha

$$\frac{\mathrm{sen}\, t}{\cos t}\;,\; \text{o tang}\; t=\frac{y}{x}\;;$$

differenziando ne viene

$$\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}\;;$$

mettendo in luogo di $\frac{1}{\cos^2 t}$ il suo valore tirato dalla prima dell' equazioni (104), e supprimendo il divisore comune x^2, si trova

$$u^2\mathrm{d}t=x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\,,$$

e per conseguenza

$$\mathrm{d}t=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{u^2}\;;$$

e mettendo per u il suo valore, questa equazione diverrà

$$\mathrm{d}t=\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\,.$$

Il differenziale dell' altra variabile si trova ancora più facilmente; poicchè l' equazione (102) ci dà

$$u=\sqrt{(x^2+y^2)}\;;$$

differenziando si avrà

$$du = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}};$$

per mezzo di questi valori di dt, di du e di u, si cambierà l'equazione avuta, dietro l'eliminazione di t, in un'altra che non conterrà più, se non x, y, dx, dy, e che per conseguenza si rapporterà alle coordinate rettangolari.

181. Si è veduto, (art. 159), che il differenziale di un arco z rapportato alle coordinate rettangolari, aveva per espressione

$$dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \ldots (106).$$

Si può determinare benanche il differenziale dello stesso arco, allorchè le coordinate sono polari; in questo caso si sostituiranno nell'equazione (106) i valori di dx, e di dy tirati dall'equazioni

$$x = u\cos t,\ y = u\,\mathrm{sen}\, t,$$

e si troverà, differenziando quest'equazioni

$$dx = -u\,\mathrm{sen}\, t\, dt + \cos t\, du$$

$$dy = u\cos t\, dt + \mathrm{sen}\, t\, du.$$

Elevando quest'equazioni a quadrato, e riducendo coll'ajuto della formula

$$\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t = 1,$$

si otterrà

$$dz = \sqrt{(u^2 dt^2 + du^2)}.$$

Questo è il differenziale dell'arco in funzione delle coordinate polari

Delle sottangenti, sunnormali, normali, e tangenti alle curve polari.

182. Si sa che nelle curve a coordinate rettangolari, la sottangente Pt (Fig. 40) è sempre compresa tra il piede P dell' ordinata ed il punto t, in cui una perpendicolare At a questa ordinata viene ad incontrare la tangente; conservando la stessa definizione per le curve polari, nelle quali l' ordinata non è più PM, ma il raggio vettore AM, la sottangente sarà allora la perpendicolare AT compresa tra il punto A e l' incontro T di essa colla tangente. Dunque nelle curve polari la sottangente ha una posizione diversa da quella che appartiene a curve che tali non sono; poichè in queste la sottangente è sempre presa sull' asse delle ascisse, mentre che nelle curve polari, ove quest' asse non esiste, la sottangente varia di posizione in ogni punto della curva.

Fig. 40

183. Determiniamo ora l' espressione analitica della sottangente nelle curve polari. A tal oggetto siano AM, ed AM' (Fig. 41) due raggi vettori, e dal punto M meniamo la perpendicolare MP sul raggio vettore AM', e conduciamo AT parallela a questa perpendicolare; i triangoli simili ATM', PMM' ci daranno la proporzione

Fig. 41

$$PM' : PM = AM' : AT;$$

da cui si tira

$$AT = \frac{AM' \,.\, PM}{PM'};$$

ed osservando che PM' è un lato del triangolo rettangolo PMM', questo valore di AT diviene

$$AT = \frac{AM' \,.\, PM}{\sqrt{(MM'^2 - PM^2)}};$$

Nel caso del limite, AM' è eguale ad AM, cioè ad u, PM si confonde coll' arco MN, la corda MM' coll' arco MM′, ed AT diviene la sottangente. Non si tratta dunque, che di avere, nell' ipotesi del limite, l' espressioni di MM′ e di MN; la prima di queste espressioni non è che il differenziale dell' arco della curva; dunque, art. (181) Fig. 41

$$M'M = \sqrt{(u^2 dt^2 + du^2)};$$

per rispetto ad MN, i settori ARR′, ed AMN ci danno la proporzione

$$AR : RR' = AM : MN,$$

o

$$1 : RR' = u = MN,$$

dunque MN $= u.RR'$, quantità, che, nel caso del limite, riducesi ad udt. Mettendo questi valori di MN, e di M′M in quello di AT, dopo di aver cambiato AM′ in u, e PM in MN, e riducendo, troveremo

$$AT = \frac{u^2 dt}{du}.$$

Questa è l' espressione della sottangente.

184. Per determinare la sunnormale, osserveremo che la normale SM (Fig. 40) essendo perpendicolare alla tangente, l' ordinata AM dee essere media proporzionale tra la sottangente, e la sunnormale; per conseguenza avremo Fig. 40

$$AT : AM = AM : \textit{sunnormale}$$

o

$$\frac{u^2 dt}{du} : u = u : \textit{sunnormale};$$

dunque sarà

$$\textit{sunnormale} = \frac{du}{dt}.$$

Per riguardo alla normale, ed alla tangente, i triangoli rettangoli MAS, MAT danno

$$MS = \sqrt{(MA^2 + AS^2)},\ MT = \sqrt{(MA^2 + AT^2)};$$

Sostituendo in quest' equazioni i valori di MA, di AS, e di AT, troveremo

$$normale = \sqrt{\left(u^2 + \frac{du^2}{dt^2}\right)},\ tangente = u\sqrt{\left(1 + u^2\frac{dt^2}{du^2}\right)}.$$

185. Per trovare l'espressione analitica del settore
Fig.41 nelle curve polari, il triangolo AM'M (Fig.41) ci da

$$aja\ AM'M = \frac{AM'.PM}{2};$$

nel caso del limite, l'aja del triangolo AM'M diviene quella di una settore elementare, la perpendicolare PM può essere rimpiazzata dall' arco MN, che abbiamo trovato eguale ad udt, ed AM' riducesi ad u. Sostituendo questi valori nell' equazione precedente troveremo

$$aja\ del\ settore\ elementare = \frac{u^2 dt}{2}.$$

Si può benanche esprimere il settore elementare in funzione delle coordinate rettangolari, poicchè mettendo in questa equazione i valori di u e di dt dati dall' equazioni (102, e 105), essa diviene

$$aja\ del\ settore\ elementare\ \frac{xdy - ydx}{2}.$$

Della determinazione del raggio di curvatura di una curva polare.

** 186. Abbiamo dato, art. 149, l'espressione del raggio di curvatura, per rispetto alle coordinate rettangolari; riservandoci la facoltà di dare a questa espressione il segno che renderà γ positivo, noi lo scriveremo così

$$\gamma=\frac{\left(1-\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\dots(107).$$

Per avere questo valore di γ espresso in funzione delle coordinate polari, non si tratta che di eliminare i coefficienti differenziali, che entrano in questa espressione, per mezzo delle seguenti equazioni

$$x=u\cos t\,,\ y=u\,\mathrm{sen}\,t\,;$$

differenziamo quest'equazioni, e dividiamo in seguito i risultamenti, l'uno per l'altro; otterremo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du\,\mathrm{sen}\,t+u\cos t\,dt}{du\cos t-u\,\mathrm{sen}\,t\,dt};$$

rappresentiamo con m, ed n i due termini di questa frazione, si avrà

$$\left.\begin{array}{l} m=du\,\mathrm{sen}\,t+u\cos t\,dt \\ n=du\cos t-u\,\mathrm{sen}\,t\,dt \end{array}\right)\dots(108)$$

e per conseguenza sarà

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m}{n}\dots(109)$$

o

$$\frac{dy^2}{dx^2}=\frac{m^2}{n^2}.$$

Per mezzo di questa equazione, il valore del numeratore di γ diviene

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{n^2+m^2}{n^2}\right)^{\frac{3}{2}};$$

elevando ogni termine di questa frazione alla potenza $\frac{3}{2}$, e riflettendo che la potenza $\frac{3}{2}$ di n^2 è n^3, si ha

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{(n^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}{n^3} \quad \ldots(110)\ ;$$

differenziando in seguito l' equazione (109), si troverà

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{ndm-mdn}{n^2}\ ;$$

dividendo il primo membro di questa equazione per dx, el secoudo per n, che equivale a dx, avremo

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{ndm-mdn}{n^3} \ldots (111)$$

Per mezzo de' valori dati dall' equazioni (110), e (111), l' equazione (107) diviene

$$\gamma=\frac{(n^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}{ndm-mdn} \ldots (112)$$

Tutto ora si riduce a trasformare questa equazione in una funzione di t e di u. A tal oggetto, si determinerà primieramente il valore di n^2+m^2, sommando i quadrati dell' equazioni (108); e riducendo per mezzo dell' equazione $\text{sen}^2 t+\cos^3 t=1$, si troverà

$$n^2+m^2=du^2+u^2dt^2 \ldots (113)$$

Per rispetto al denominatore dell' equazione (112), differenzieremo successivamente l' equazioni (108) trattando dt come costante; e moltiplicando i rispettivi risultamenti per n ed m, troveremo

$$ndm=nd^2u\,\text{sen}t+2ndu\cos t dt-nu\,\text{sen}t dt^2$$
$$mdn=md^2u\cos t-2mdu\,\text{sen}t dt-mu\cos t dt^2\ ;$$

togliendo la seconda equazione dalla prima, si troverà

$$\left.\begin{array}{l} ndm-mdn=d^2u(n\,\mathrm{sen}t-m\cos t) \\ \quad +2dudt(n\cos t+m\,\mathrm{sen}t) \\ \quad -udt^2(n\,\mathrm{sen}t-m\cos t) \end{array}\right\}\ldots (114);$$

moltiplicando la seconda dell' equazioni (107) per sen$t$, e la prima per cos$t$; e togliendole l' una dall' altra, e riducendo per mezzo della relazione $\mathrm{sen}^2 t+\cos^2 t=1$, otterremo

$$n\,\mathrm{sen}t-m\cos t=-udt$$

Operando similmente per formare il valore di $n\cos t+m\,\mathrm{sen}t$, si avrà

$$n\cos t+m\,\mathrm{sen}t=du;$$

Sostituendo questi valori nell' equazione (114), questa diverrà

$$ndm-mdn=-ud^2udt+2du^2dt+u^2dt^3\ldots(115)$$

Per mezzo de' valori che abbiamo determinato, l' equazioni (113), e (115) cambieranno l'equazione (112) in

$$\gamma=\frac{(du^2+u^2dt^2)^{\frac{3}{2}}}{2du^2dt-ud^2udt+u^2dt^3}.\,{}^{**}$$

Delle curve trascendenti.

187. Si chiamano curve trascendenti quelle le di cui equazioni contengono quantità trascendenti, o in generale che non possono essere espresse da un numero finito di termini algebrici. Faremo conoscerne alcune degne di maggiore attenzione.

Della spirale di Archimede o di Conone.

188. Ecco in che modo può intendersi generata la spirale di Archimede (Fig. 16): Mentre il raggio AB descrive tutto il cerchio, un punto A percorre AB, mo- Fig. 16

Fig. 16 vendosi con moto uniforme; in modo che il punto mobile il quale era in A al principio della rotazione di M, si trovi in B, quando B ha fatto un intero giro intorno al centro A. Il punto mobile in questo movimento descrive la spirale di Archimede.

Siano $AB=a$, arc $BN=t$, $AM=u$; dietro la precedente definizione si avrà

$$AM:AN=\text{arc }NB:BCD;$$

o

$$u:a=t:2\pi a;$$

da cui si deduce

$$u=\frac{t}{2\pi}$$

Questa curva non ha, come si vede, coordinate rettangolari. Allorchè AB ha descritto l' intero cerchio, l' arco NB equivale alla circonferenza; dunque allora $t=2\pi a$, il che cambia l' equazione precedente in

$$u=\frac{2\pi a}{2\pi}=a.$$

Se il punto A continua a muoversi sempre uniformemente, il raggio AB descriverà una seconda circonferenza intorno al centro A; e se si prende $BA'=BA$, il punto mobile arriverà in B', al termine di questa seconda rotazione: allora t sarà eguale a $4\pi a$, il che darà $u=2a$; e così in seguito.

Della spirale logaritmica.

189. La spirale logaritmica è una curva polare, Fig. 40 (Fig. 40), nella quale l' angolo AMT formato dal raggio vettore AM colla tangente MT alla curva, è costante. Perciò, chiamando a la tangente trigonometrica dell' angolo AMT, avremo

$$\operatorname{tang}AMT=a;$$

ora il triangola TMA , rettangolo in A, ci dà la proporzione

$$1 : \text{tang AMT} = \text{AM} : \text{AT} ;$$

dunque sarà

$$\text{tang AMT} = \frac{\text{AT}}{\text{AM}} :$$

mettendo u in luogo del raggio vettore AM, ed in luogo di AT l'espressione $\frac{u^2 dt}{du}$, che abbiamo trovato (art. 183), per la sottangente di una curva polare, avremo

$$\text{tang AMT}, \text{ o } a = \frac{udt}{du} ;$$

da cui si otterrà

$$\frac{adu}{u} = dt \ldots (116) ;$$

ed integrando, troveremo

$$a \log u = t + costante .$$

Sia e la base del sistema Neperiano ; se a si riguarda come il logaritmo di e in un dato sistema di tavole, potrà Le mettersi in luogo di a, ed allora Le log u rappresenterà il logaritmo di u in questo sistema * ; in guisachè avremo

$$\text{L}u = t + costante$$

190. La spirale logaritmica può costruirsi per asse-

---

* Per dimostrarlo, sia e la base del sistema Neperiano ; avremo $u = e^{\log u}$; prendendo i logaritmi nel sistema delle tavole indicato da L, si avrà

$$\text{L}u = \text{L} (e^{\log u}) = \log u \text{L}e.$$

Fig.42 guazione di punti nel seguente modo: (Fig.42) dopo di aver divisa la circonferenza OO'O'' in parti eguali, si meneranno de' raggi a' punti di divisione, e sopra questi si prenderanno le parti Am, Am', Am'', Am''' ec. che siano in progressione geometrica; i punti m, m', m'', m''', m^{iv}, ec. apparterranno ad una spirale logaritmica. Infatti, supponendo che le parti mm', $m'm''$, $m''m'''$, ec. abbiano picciolissima estensione, potranno esser riguardate come rette; ed allora sarà facile dimostrare che i triangoli Amm', A$m'm''$, A$m''m'''$ ecc. sono simili; infatti gli angoli in A sono eguali per costruzione, e gli angoli mm'A, $m'm''$A, $m''m'''$A ec. lo sono per la proprietà principale della curva; abbiamo dunque questa serie di proporzioni

$$\mathrm{A}m : \mathrm{A}m' = \mathrm{A}m' : \mathrm{A}m''$$
$$\mathrm{A}m' : \mathrm{A}m'' = \mathrm{A}m'' : \mathrm{A}m'''$$
$$\text{ec.} \quad \text{ec.} \quad \text{ec.}$$

ciocchè dimostra che le ordinate Am, Am', Am'', Am''' ec. sono in progressione geometrica.

** 191. Nella spirale logaritmica, la normale è eguale al raggio di curvatura. Infatti, poicchè l'espressione di questo raggio in una curva polare è, (art. 186),

$$\gamma = \frac{(\mathrm{d}u^2 + u^2 \mathrm{d}t^2)^{\frac{3}{2}}}{2\mathrm{d}u^2 \mathrm{d}t - u\mathrm{d}^2 u\mathrm{d}t + u^2 \mathrm{d}t^3},$$

bisognerà mettere in questa formola, i valori di du, e di du^2 tirati dall'equazione della spirale logaritmica; or l'equazione (116) ci da

$$\mathrm{d}u = \frac{u\mathrm{d}t}{a},\ \mathrm{d}^2 u = \frac{\mathrm{d}u}{a}\mathrm{d}t = \frac{u\mathrm{d}t^2}{a^2};$$

sostituendo questi valori in quello di γ, si avrà

$$\gamma = \frac{\left(\frac{u^2}{a^2} + u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{u^2}{a^2} + u^2} = \left(\frac{u^2}{a^2} + u^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{u^2}{a^2} + u^2\right)}.$$

Da un' altra parte, se nell' espressione della normale, che è, (art. 184.)

$$\sqrt{(u^2 + \frac{du^2}{dt^2})},$$

sostituiscasi il valore di $\frac{du^2}{dt^2}$, troveremo egualmente $\sqrt{(\frac{u^2}{a^2} + u^2)}$; ciocchè pruova che in questa curva, la normale è eguale al suo raggio di curvatura, e come d' altronde esso è diretto nel senso della stessa normale, (art. 155), ne risulta che queste linee si confondono.

192. Da questa proprietà ne dedurremo la dimostrazione, che l' evoluta della spirale logaritmica è un' altra spirale logaritmica. A tal oggetto, considerando il punto M della normale, come appartenente al raggio di curvatura, e come situata sull' estremità di questo, esso è sull' evoluta. Siano (Fig. 43) t' ed u' le coordinate di questo punto, sarà facile di determinarle in funzione delle coordinate t, u del punto M della curva; poicchè sia oo' un arco di cerchio descritto con un raggio eguale all' unità; le ascisse de' punti M ed N differiranno tra loro per quanto è la lunghezza di questo arco, il quale, a causa dell' angolo retto MAN', sarà eguale al quarto della circonferenza; se, adottando la notazione in uso, rappresentiamo con $\frac{\pi}{2}$ il quarto della circonferenza descritta col raggio eguale ad 1, avremo $t' = t + \frac{\pi}{2}$, equazione, la quale, differenziata, ci darà Fig. 43

$$dt = dt'.$$

Da un' altra parte, l' ordinata polare u' del punto N dell'evoluta, essendo eguale alla sunnormale $\frac{du}{dt}$, della spirale logaritmica, cambieremo $\frac{du}{dt}$ in u nell' equazione di questa curva, ed avremo $u = au'$; e perciò $du = adu'$; Sostituendo questi valori di dt, du, e di u nell' equazione (116) della spirale logaritmica, troveremo

$$a\frac{du'}{u'} = dt',$$

equazione, che avendo la stessa forma della precedente, c' insegna che la spirale logaritmica ha per evoluta un' altra spirale logaritmica.**

Della spirale iperbolica, e delle spirali comprese nell' equazione $u = at^n$.

193. La proprietà caratteristica della spirale iperbolica è di avere una sottangente costante. Se questa sottangente rappresentisi con a, ne eguaglieremo il valore a quello della sottangente (art. 183) di una curva polare, ed avremo per l' equazione della spirale iperbolica

$$u^2\frac{dt}{du} = -a;$$

Noi prendiamo la costante a negativa, perchè allora si ha

$$-\frac{du}{u^2} = \frac{dt}{a},$$

equazione, ch' essendo integrata, dà

$$\frac{1}{u} = \frac{t}{a} + C;$$

o rimpiazzando la quantità indeterminata C con un altra quantità $\frac{C'}{a'}$ avremo

$$\frac{1}{u}=\frac{t}{a}+\frac{C}{a};$$

prendendo l' origine di t, in modo che l' ascissa $t+C'$ sia eguale ad una nuova ascissa t', l' equazione precedente diverrà

$$\frac{1}{u}=\frac{t'}{a},$$

o piuttosto

$$u=\frac{a}{t'} \quad \ldots (117);$$

ciocchè dimostra, che allorchè $t'=o$, $u=\infty$; d' onde segue che il raggio vettore che corrisponde al punto, ove t' è nullo, è un asintoto della curva.

194. L' equazione (117) ci mostra ancora che il raggio vettore è in ragion inversa dell' ascissa; se facciamo successivamente $t=2\pi$, $t=4\pi$, $t=6\pi$ ecc.; avremo questa serie di valori per u, $\frac{a}{2\pi}$, $\frac{a}{4\pi}$, $\frac{a}{6\pi}$, ecc.; il che c' insegna, che al termine di due rivoluzioni, il raggio vettore trovasi ridotto alla metà di ciocch' era alla fine della prima; che al termine di tre rivoluzioni, trovasi ridotto al terzo, e così in seguito.

195. L' equazione della spirale iperbolica, come quella della spirale di Conone sono casi particolari dell' equazione $u=at^n$; poicchè facendo $n=1$, ed $a=\frac{1}{2\pi}$, si ottiene la prima; e facendo $n=-1$, si

ottiene la seconda. Tra le spirali determinate da questa equazione, si distingue ancora la spirale parabolica, la quale si trova facendo $n=2$.

Della Logaritmica.

196. La logaritmica è una curva a coordinate rettangolari, nella quale l'ascissa è il logaritmo dell'ordinata; dunque l'equazione di questa curva è

$$x=\log y$$

da cui si ottiene

$$y=a^x$$

e per conseguenza

$$\frac{dy}{dx}=a^x \log a\ .$$

197. Per discutere questa equazione, facciasi $x=0$, si avrà $y=1$; se in seguito si danno ad x de' valori crescenti, e positivi, y andrà sempre crescendo; ma se se si da ad x un valore negativo $-u$, si troverà

$y=a^{-u}=\frac{1}{a^u}$; e si vede che l'ordinata tanto più diminuirà, quanto più si allontanerà dall' origine, nel senso delle ascisse negative; e che infine la curva non potrà raggiugnere il prolungamento dell' asse delle x, che all' infinito, nel qual caso solamente l'equazione $y=\frac{1}{a^u}$, diverrebbe $y=\frac{1}{a^\infty}=0$: da ciò si può conchiudere che il prolungamento dell' asse delle x è un asintoto della curva.

198. Se, a partir dall' origine, si prendano delle
Fig. 17 ascisse eguali, (Fig. 17), $AP=u$, $AP'=-u$, si avrà

$$PM=a^u\ ,\ P'M'=\frac{1}{a^u}\ ,$$

dunque si avrà

$$PM.P'M'=1.$$

199. La proprietà più rimarchevole di questa curva è che la sottangente ha un valor costarte: infatti differenziando l'equazione della logaritmica, si ha

$$\frac{dy}{dx}=a^x \log a,$$

da cui si ottiene

$$\frac{a^x dx}{dy}=\frac{1}{\log a}, \text{ o } \frac{y dx}{dy}=\frac{1}{\log a}.$$

Or il primo termine di questa equazione esprime la sottangente della curva, (art 69), dunque questa è costante.

Della Cicloide.

200. La cicloide è una curva che vien descritta dal movimento di un punto N (Fig. 18), situato sulla circonferenza di un cerchio, che rota su di una retta HH'. È chiaro, che in questo movimento di R verso H, tutt' i punti dell' arco RN vanno successivamente ad applicarsi sulla retta RH, finchè il punto N a suo luogo va a cadere sopra H; per conseguenza, l' arco RN sarà eguale alla retta RH. Fig. 18.

Tutt' i punti, pe' quali passa il punto N in questo movimento, trovandosi per ipotesi sulla cicloide, il punto H si troverà benanche sopra di questa curva: prendiamolo per origine delle ascisse, ed abbassiamo la perpendicolare NK sul diametro RR'; facciasi $HP=x$, $PN=y$, $RR'=2a$, arco $NR=z$, $NK=u$, si avrà

$$HP=HR-PR;$$

o

$$x=\text{arc } NR-NK,$$

cioè

$$x=z-u \ldots (118)$$

Prima di tutto elimineremo l'arco z nel modo seguente: si differenzierà l'equazione precedente, ciocchè ci darà

$$dx = dz - du \ldots (119).$$

Per avere il valore di dz in funzione di u, osserveremo che tra u e z si ha la relazione

$$u = \operatorname{sen} z$$

questa equazione differenziata, (art. 42), da

$$du = dz \frac{\cos z}{a},$$

da cui si ottiene

$$dz = \frac{a du}{\cos z}.$$

In questa equazione si sostituirà a $\cos z$ il valore che si ha dall' equazione

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = a^2,$$

o piuttosto

$$u^2 + \cos^2 z = a^2;$$

e si avrà

$$dz = \frac{a du}{\sqrt{(a^2 - u^2)}}.$$

Sostituendo questo valore nell' equazione (191), si avrà

$$dx = \frac{a du}{\sqrt{(a^2 - u^2)}} - du \ldots (120).$$

Ora non si dee far altro che esprimere u in funzione di y. A tal oggetto sia O il centro del cerchio generatore RNR'; avremo

$$OK = \sqrt{(\overline{ON}^2 - \overline{NK}^2)},$$

o

$$a - y = \sqrt{(a^2 - u^2)} \ldots (121);$$

elevando questa equazione a quadrato, e riducendo, sarà

$$u=\sqrt{(2ay-y^2)} \ldots (122)$$

e differenziando

$$du = \frac{(a-y)dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}} \ldots (123)$$

L'equazioni (121) 123) trasformano l'equazione (120) in

$$dx=\frac{ady}{\sqrt{(2ay-y^2)}}-\frac{(a-y)dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}};$$

riducendo si trova

$$dx=\frac{ydy}{\sqrt{(2ay-y^2)}}:$$

questa è l'equazione della cicloide.

201. Si può ottenere ancora l'equazione della cicloide in funzione dell'arco nel modo seguente: l'equazione u=sen$z$ da

$$z=\text{arc}(\text{sen}=u);$$

mettendo per u il suo valore dedotto dall'equazione (122), si avrà

$$z=\text{arc}[\text{sen}=\sqrt{(2ay-y^2)}];$$

sostituendo questo valore, e quello di u nell'equazione (118), si avrà

$$x=\text{arc}[\text{sen}=\sqrt{(2ay-y^2)}]-\sqrt{(2ay-y^2)}^* \ldots (124)$$

---

* Il seno qui corrisponde al raggio a; quello delle tavole sarebbe

$$\frac{\sqrt{(2ay-y)^2}}{a}.$$

202. Per discutere questa equazione, andiamo prima di tutto a dimostrare, che y non può essere negativo, nè maggiore di $2a$: Infatti se vi si fa $y=-y'$, l'espressione arc$[\text{sen}=\sqrt{(2ay^2-y)}]$ diverrà arc$[\text{sen}=\sqrt{(-2ay'-y')}]$, valore imaginario. In secondo luogo se si fa $y=2a+\delta$, l'espressione arc$[\text{sen}=\sqrt{(2ay-y^2)}]$, diviene arc$[\text{sen}=\sqrt{(-2a\delta-\delta^2})]$, valore imaginario:
Fig.19 dunque se ad una distanza (Fig. 19) $BD=2a$ dall'asse delle ascisse si meni AA' paralella a CC', la curva sarà compresa tra le paralelle AA', CC'.

Il maggior valore che possa aver y è $2a$, poichè se si fa rotare il cerchio generatore da H fino ad H'
Fig.18 (Fig. 18), il punto N che prima era in H si eleverà successivamente finchè arriva in D' all'estremità del diametro DD': allora l'ascissa HD sarà eguale ad DFD', cioè alla semicirconferenza del cerchio generatore.

Questo risultamento è conforme a quello che si ha dall'equazione (124), poicchè se si fa $y=2a$, si trova $x=\text{arc}(\text{sen}=o)$; or l'arco, il cui seno è zero, dee essere uno de' seguenti o, DFD', 2DFD', 3DFD' ecc.; e si vede che nel presente caso questo arco è DFD'.

Il punto N giunto in D', dopo di aver descritto l'arco HD' di cicloide, se continua a muoversi, descriverà un secondo arco D'H' simile al primo; infine se il cerchio generatore continua sempre a rotare sopra l'asse delle ascisse, il punto N genererà una serie indefinita di archi di cicloide CB'C', C'B''H' ecc. Il cerchio generatore potendo anche muoversi nel senso di A verso H, il punto N descriverà ancora una serie indefinita di archi AB'A', A'B''H ecc.

L'unione di tutti questi archi è ciocchè forma la cicloide nel senso più generale.

Se si volesse introdurre questo seno, bisognerebbe scrivere

$$x=a.\text{arc}\left[\text{sen}=\frac{\sqrt{(2ay-y^2)}}{a}\right]-\sqrt{(2ay-y^2)}.$$

203. La normale al punto N segnato dalle coordinate x, y (Fig. 19) è determinata dalla formola, (art. 70), Fig. 19

$$normale = y\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2}+1\right)};$$

Se in questa formola si sostituisca il valore di $\frac{dy}{dx}$ dedotto dall'equazione della cicloide, si troverà

$$normale = y\sqrt{\left(\frac{2ay-y^2}{y^2}+1\right)} = \sqrt{(2ay)}.$$

Per costruire questo valore, menisi la corda ND; si avrà

$$DE : ND = ND : DB,$$

o

$$y : ND = ND : 2a;$$

dunque

$$\text{corda } ND = \sqrt{(2ay)}:$$

e come, per la natura del cerchio l' angolo BND è retto, la corda NB sarà perpendicolare all' estremità della normale ND; dunque la corda NB prolongata è tangente della cicloide al punto N; poichè si sa che la tangente e la normale formano tra loro un angolo retto.

Si potrebbe dunque costruire la tangente al punto N, con descrivere il semicerchio generatore BND, e con prolungare la corda BN; ma per evitare di costruire questo cerchio generatore ad ogni punto della curva, basterà di costruire il semicerchio generatore sulla più grande ordinata DD' della cicloide (Fig. 18), Fig. 18 e dopo di aver condotto dal punto N' la perpendicolare N'E sopra DD', si tirerà la corda D'F: allora la N'T parallela a questa corda sarà la tangente cercata: questa costruzione è una conseguenza di ciocchè abbiamo detto.

204. Per aver l' espressione del raggio osculatore della cicloide, bisogna dedurre dall' equazione di que-

sta curva i valori di $\frac{dy}{dx}$, e di $\frac{dy^2}{dx^2}$, che sostituiremo nell' espressione del raggio d' osculo, art. 150.

$$\gamma = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

nel quale adottiamo il segno negativo, perchè sappiamo che la curva volge la sua concavità all' asse delle ascisse.

L' equazione della cicloide ci da immediatamente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(2ay-y^2)}}{y} \ldots (125).$$

Per avere $\frac{d^2y}{dx^2}$, facciasi $\frac{dy}{dx} = p$, si avrà

$$p = \frac{\sqrt{(2ay-y^2)}}{y} = \sqrt{\left(\frac{2a}{y}-1\right)};$$

e differenziando, (art. 23), si avrà

$$dp = -\frac{\frac{2a}{y^2}dy}{2\sqrt{\left(\frac{2a}{y}-1\right)}} = -\frac{ady}{y\sqrt{(2ay-y)^2}};$$

dunque sarà

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{a}{y\sqrt{(2ay-y^2)}};$$

moltiplicando questa equazione per l' altra (125), otterremo, (art. 24),

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{a}{y^2}\ , \quad \text{o} \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{a}{y^2}\ ;$$

per mezzo di questi valori si ha in fine

$$\gamma = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{a}{y^2}} = \frac{(2a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{ay^{\frac{3}{2}}}{y^2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}\ a^{\frac{1}{2}}}{y^{-\frac{1}{2}}},$$

e facendo passare y nel numeratore, si avrà

$$\gamma = 2^{\frac{3}{2}}\ a^{\frac{1}{2}}\ y^{\frac{1}{2}} = 2.2^{\frac{1}{2}}.\ a^{\frac{1}{2}}.\ y^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{(2ay)}\ :$$

dunque il raggio osculatore NM (Fig. 19) è doppio Fig.19
della normale ND.

205. L'equazione dell'evoluta si otterrà sostituendo i valori di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, e di $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ nelle formole (art.149)

$$y-\beta = -\frac{1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}},$$

$$x-\alpha = \frac{\left(1+\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}} = -(y-\beta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\ ;$$

e si troverà

$$y-\beta = \frac{\frac{2a}{y}}{\frac{a}{y^2}} = 2y,\ x-\alpha = -2\sqrt{(2ay-y^2)}\ ;$$

dunque

$$\beta=-y\ ,\ \text{ed}\ \alpha=x+2\sqrt{(2ay-y^2)}$$

Fig. 20 o (Fig. 20)

$$QN'=NP\ ,\ \alpha=HP+2NK\ ;$$

ed osservando che HP+NK=HR , l'ultima equazione può scriversi così

$$\alpha=\text{arc}N'R+NK\ \ldots\ (126).$$

Prolunghiamo R'R in R'' , prendiamo RR''$=a$, e sopra RR'' descrivesi la semicirconferenza RN'R'' : questa passerà pel punto N' a causa delle corde eguali N'R , NR , e si avrà

$$\text{arc}\ NR=\text{arc}\ N'R\ ,\ \text{ed}\ NK=N'K'\ ;$$

sostituendo questi valori nell' equazione (126) , si troverà

$$\alpha=\text{arc}NR'+N'K'\ ,$$

ossia

$$\alpha=\text{arc}N'R+\sqrt{(2a\beta-\beta^2)}\ldots(127)$$

Questa è l'equazione ch' esiste tra le coordinate HQ$=\alpha$, e QN'$=\beta$ appartenenti ad un punto N' dell' evoluta. Prolunghisi ora l'ordinata CD$=2a$, e sul prolungamento prendasi una quantità DH'$=2a$, e pel punto H' menisi la H'D' paralella ad HD , e trasportisi l'origine H al punto H'. A tal oggetto siano H'Q'$=\alpha'$, Q'N'$=\beta'$: l'ascissa sarà

$$H'Q'=HD-HQ\ ,$$

o

$$\alpha'=\tfrac{1}{2}\ \textit{circonferenza generatrice}-HQ\ ,$$

o

$$\alpha'=\pi a-\alpha:$$

per rispetto all' ordinata β' , abbiamo

$$N'Q' = H'D - QN'.$$

o

$$\beta' = 2a - \beta :$$

da quest' equazioni se ne deduce

$$\alpha = \pi a - \alpha', \quad \beta = 2a - \beta' :$$

per mezzo di questi valori l' equazione (127) diviene

$$\pi a - \alpha' = \text{arc}N'R + \sqrt{(2a\beta' - \beta'^2)},$$

o

$$\pi a - \alpha' = \text{arc}RN'R'' - \text{arc}\,N'R'' + \sqrt{(2a\beta' - \beta'^2)}$$

$$= \pi a - \text{arc}N'R'' + \sqrt{(2a\beta' - \beta'^2)} ;$$

e per conseguenza

$$\alpha' = \text{arc}\,N'R'' - \sqrt{(2a\beta' - \beta'^2)} :$$

questa equazione è quella di una cicloide; dunque l' evoluta di una cicloide è un' altra cicloide.

206. Si può colla sintesi dimostrare nel seguente modo (Fig.20), che l' evoluta HH' è una cicloide. Si ha

$$\text{arc}\,R''N' + N'R = \pi a ;$$

dunque

$$\text{arc}\,R''N' = \pi a - \text{arc}\,RN'$$

da un' altra parte si ha

$$\text{arc}\,RN' = \text{arc}RN = HR, \text{ art. } 148 ;$$

sostituendo questo valore nell' equazione precedente, si avrà

$$\text{arc}\,R''N' = \pi a - HR = HD - HR = RD$$

o

$$\text{arc}\,R''N' = H'R'',$$

che è la proprietà della cicloide.

Del cambiamento della variabile indipendente.

** 207. Allorchè è data una formola, che contiene de' coefficienti differenziali, essi non possono essere eliminati, che coll' ajuto dell' equazione della curva, alla quale questa formola si vuole applicare; così se si ha la formola

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx},$$

e si domandi cosa essa diviene, allorchè la curva è una parabola, si tireranno dall' equazione $y=ax^2$ della parabola i valori di $\frac{dy}{dx}$, e di $\frac{dy^2}{dx^2}$, che si sostituiranno in questa formola, ed allora i coefficienti differenziali dispariranno. Se le quantità $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ si riguardino come incognite, vi bisognano in generale due equazioni per eliminarle da una formola, e queste ci saranno date, differenziando due volte di seguito l' equazione della curva.

208. Allorchè per mezzo di operazioni algebriche non figureranno più le dx sotto le dy, come nella formola seguente

$$\frac{y(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2-yd^2y}\ldots(128),$$

si opera la sostituzione, riguardando dx, dy, e d^2y come incognite; e poicchè, per eliminarle, vi bisogna in generale un egual numero di equazioni, sembra da principio che l' eliminazione non possa effettuarsi, poicchè la differenziazione dell' equazione della curva non può darci che due equazioni tra dx, dy e dy^2; ma bisogna osservare, che allorchè si saranno eliminati dy e dy^2, per mezzo di queste due equazioni, si troverà nella formola un fattore comun dx^7 che svanirà.

Per esempio, se seguitiamo a supporre che la curva sia una parabola rappresentata da $y=ax^2$, differenziando questa equazione due volte di seguito, si avrà

$$dy=2axdx, \quad dy^2=2adx^2;$$

Sostituiti questi valori nell' equazione (128), si otterrà, dopo di averne tolto il fattore comune dx^2

$$\frac{y(1+4a^2x^2)}{4a^2x^2-2ay}.$$

209. È facile a comprendersi la ragione, per cui dx^2 diviene fattore comune; poicchè quando in una formola, che prima contenea $\frac{d^2y}{dx^2}$, e $\frac{dy}{dx}$, si è fatto scomparire il denominatore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, tutti i termini, all' infuori di quelli affetti da $\frac{d^2y}{dx^2}$ e da $\frac{dy}{dx}$, hanno dovuto acquistare il fattore comune dx^2; allora i termini ch' erano affetti da $\frac{dy^2}{dx^2}$ non più contengono dx, mentrecchè gli altri affetti da $\frac{dy}{dx}$ rac-

chiudono dx al primo grado, giacchè il prodotto di $\frac{dy}{dx}$ per dx^2 si riduce a $dydx$. In seguito, allorchè si differenzia l'equazione della curva, e che si ottengono de' risultamenti della forma $dy = Mdx$, $dy^2 = Ndx^2$, questi valori sostituiti ne' termini affetti da dy^2, e da $dydx$, li cambieranno, come gli altri termini in prodotti di dx^2.

210. Ciocchè diciamo d' una formula che contiene i differenziali de' due primi ordini potendosi applicare a quella, nelle quali questi differenziali si elevono ad ordini superiori, segue da ciò, che differenziando l'equazione della curva tante volte quanto sarà necessario, potranno sempre togliersi dalla formula proposta i differenziali che sono in essa contenuti.

211. Non sarebbe lo stesso, se la formola contenesse de' termini affetti da d^2x, da d^3x ecc., oltre i differenziali, che abbiamo esaminati; poicchè supponiamo, per esempio, che in questa formola vi entrassero i seguenti differenziali, dx, dy, d^2x, d^2y, e che differenziando due volte di seguito l' equazione rappresentata da $y = fx$, se ne deducessero queste equazioni

$$F(x, y, dy, dx) = 0, \quad F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y) = 0,$$

con queste due equazioni non si potrebbero eliminare, che due de' tre differenziali dy d^2x d^2y, e si vede che sarebbe impossibile di fare scomparire tutt' i differenziali della formola; vi è dunque, in questo caso, una condizione tacita espressa dal differenziale d^2x; cioè che la variabile x è essa stessa considerata come una funzione di una terza variabile, che non comparisce nella formola, e che si chiama *la variabile indipendente*; ciò diverrà chiaro, se si riflette che l' equazione $y = fx$ potrebbe nascere dal sistema delle due equazioni

$$x=Ft,\ y=\varphi t,$$

tra le quali si fosse eliminato t ; cosi l' equazione $y=a\frac{(x-c)^2}{b^2}$ si ottiene dal sistema delle due altre

$$x=bt+c,\ y=at^2,$$

e si conosce che y ed x debbano variare in virtù dell' accrescimento che t può ricevere ; ma l' ipotesi che x ed y variino per degli accrescimenti dati a t, suppone, che vi siano delle relazioni tra x e t, e tra y e t; una di queste è arbitraria, poicchè l' equazione che noi rappresentiamo in generale con $y=fx$, essendo, per esempio $y=a\frac{(x-c)^2}{b^2}$, se tra t ed x si stabilisce la relazione arbitraria $x=\frac{t^3}{c^2}$, questo valore messo nell' equazione $y=a\frac{(x-c)^2}{b^2}$ la cambierà in $y=a\frac{(t^3-c^3)^2}{b^2c^4}$, equazione, che, combinata coll' altra $x=\frac{t^3}{c^2}$, dee riprodurre per mezzo dell' eliminazione, $y=a\frac{(x-c)^2}{b^2}$, sola condizione, della quale si dee aver conto nella scelta della variabile t.

212. Dunque la variabile indipendente t si può determinare arbitrariamente. Per esempio si prenderà per questa variabile indipendente, la corda, l' arco, l' ascissa, o l' ordinata ; se t rappresenta l' arco della curva, bisogna che si abbia $t=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$; se

rappresenta la corda, e che l'origine sia al vertice della curva, si avrà $t=\sqrt{(x^2+y^2)}$; infine t potrebbe essare l'ascissa o l'ordinata, ed allora si avrebbe $t=x$, o $t=y$.

213. La scelta di una di queste ipotesi, o di qualunque altra, diviene indispensabile, onde la formola, la quale contiene de' differenziali, possa esserne sgombrata; se noi non lo facciamo sempre, è perchè supponiamo tacitamente che la variabile indipendente è stata determinata. Per esempio nel caso più ordinario ove una formola non contiene che i differenziali dx, dy, d^2y, d^3y ecc., si fa l'ipotesi di prendere la variabile indipendente per l'ascissa, poicchè allora ne risulta

$$t=x\,,\quad \frac{dx}{dt}=1\,,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=0\,,\quad \frac{d^2x}{dt^3}=0\,;\ \text{ecc.}$$

e si vede che la formola non dee affatto avere differenziali secondi, terzi ecc. di x.

214. Per ristabilire la formola in tutta la sua generalità, bisogna che x ed y siano funzioni di una terza variabile indipendente t; e che si abbia, art. 24,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}\,;$$

si deduce da questa equazione

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dy}}{\frac{dx}{dt}}\ \dots\ (129)$$

prendendo il differenziale secondo di y, ed operando sul secondo membro, come si fa per le frazioni, (art. 19,) si troverà

$$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt}-\frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx^2}{dt^2}}.$$

In questa espressione dt fa due officii; l'uno è quello d'indicare quale è la variabile indipendente t, e l'altra di entrarvi come segno di Algebra. Noi potremo considerare dt solamente sotto il secondo rapporto, senza perdere di veduta che t è la variabile indipendente; allora togliendo dt^2 come fattore comune, l'espressione precedente diverrà più semplice, scrivendola così

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^2};$$

e dividendo per dx, essa diverrà

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dx\,d^2y\,dy\,d^2x}{dx^3}.$$

215. Operando nella stessa maniera sull' equazione (129), si vede che prendendo t per variabile indipendente, il secondo membro dell' equazione diviene identico al primo; per conseguenza, allorchè si prende t per variabile independente, non vi è che un sol cambiamento a fare nella formola, che contiene i coefficienti differenziali $\frac{dy}{dx}$, e $\frac{d^2y}{dx^2}$, cioè di rimpiazzare questo secondo coefficiente differenziale con

$$\frac{dx\,d^2y-dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Per applicare queste considerazioni al raggio di curvatura, la cui equazione è, (art. 186)

$$\gamma=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

nel caso che vogliasi il valore di γ, prendendo t per variabile indipendente; questa equazione diverrà

$$=\gamma\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3}};$$

ed osservando che il numeratore equivale a $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3}$, si avrà

$$\gamma=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x} \ldots (130)$$

216. Questo valore di γ suppone dunque che x, ed y siano funzioni di una terza variabile indipendente; ma se questa variabile dovesse essere x, cioè se si avesse $t=x$, si avrebbe $d^2x=0$, e questa formola tornerebbe ad essere quella del caso ordinario, divenendo

$$\gamma=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y}=\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

217. Ma se invece di prendere x per la variabile indipendente, si volesse che questa fosse l'ordinata, questa condizione sarebbe espressa dall' equazione $y=t$; differenziandola due volte di seguito, si avrebbe

$$\frac{dy}{dt}=1,\ \frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

La prima di queste due equazioni ci dice solamente che y è la variabile indipendente, ciocchè nulla cambia alla formola; ma la seconda ci mostra che d^2y dee esser nullo, ed allora l'equazione (130) riducesi a

$$\gamma = -\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dy d^2x}.$$

218. Bisogna osservare, che quando la variabile indipendente è x, e che per conseguenza si ha $d^2x=0$, questa equazione ci mostra che dx è costante; d'onde ne segue, che in generale la variabile, la quale viene riguardata come indipendente, ha sempre un differenziale costante.

219. Infine se si prende l'arco per variabile indipendente, si avrà

$$dt = \sqrt{(dx^2+dy^2)};$$

elevando a quadrato e dividendo per dt^2, questa equazione ci darà

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = 1;$$

differenziando questa equazione, riguarderemo, (art. 218), dt come costante, poicchè t è la variabile indipendente; ed operando a tenore della regola degli esponenti, si troverà

$$\frac{2dxd^2x}{dt^2} + \frac{2dyd^2y}{dt^2} = 0:$$

da cui si ha

$$dxd^2x = -dyd^2y;$$

per conseguenza, se nell'equazione (130) si sostituisce il valore di d^2x, o quello di d^2y, si avrà nel primo caso

$$\gamma = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx^2+dy^2)d^2y}dx = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{d^2y}dx,$$

e nel secondo

$$y=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx^2+dy^2)d^2x}dy=-\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{d^2x}dy.$$

220. In ciocchè precede ci siamo solamente occupati de' due coefficienti differenziali $\frac{dy}{dx}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$; ma se la formola contenesse de' coefficienti differenziali di ordini più elevati, bisognerebbe, con de' metodi analoghi a quelli che abbiamo impiegato, determinare i valori di $\frac{d^3y}{dx^3}$, di $\frac{d^4y}{dx^4}$ ecc., che si rapporterebbero al caso, in cui x ed y sono funzioni di una terza variabile indipendente **.

Del metodo degli infinitamente piccoli.

221. Le nozioni che abbiamo dato dell' infinito riduconsi a questa proposizione: una quantità non può dirsi infinita, quando è ancora suscettibile di accrescimento. Per conseguenza se si ha $x+a$, ed x diviene infinito, bisogna supprimere a; altrimenti si supporrebbe che x può ancora aumentarsi di a, ciocch' è contro la nostra definizione.

222. Questa proposizione essendo fondamentale, io mi sono impegnato di dimostrarla in un modo più soddisfacente, nel seguente modo. Sia l' equazione

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{x}=M\ldots(131);$$

moltiplicandola per ax, si ottiene

$$x+a=Max\ldots(132).$$

Ciò posto, supponiamo che x diviene infinito, la frazione $\frac{1}{x}$ essendo giunta all' ultimo suo grado di decrescimento, si riduce evidentemente a zero; allora l' equazione (131) diviene

$$M = \frac{1}{a} .$$

Questo valore sostituito nella equazione (132), da

$$x + a = x .$$

Ciocchè mostra, che $x+a$ riducesi ad x nell' ipotesi di x infinito.

223. La quantità a, rispetto alla quale x è infinito, è ciocchè chiamasi un *infinitamente piccolo*, per rispetto ad x.

224. Come noi non prendiamo in considerazione che i rapporti delle quantità, la dimostrazione precedente ha luogo, anche quando x ha un valore finito, purchè però a sia infinitamente piccolo, rispetto ad x. La teorica delle frazioni da ragione di questa verità. Infatti, se la quantità finita b si paragona alla frazione $\frac{b}{z}$, egli è certo, che quanto più il denominatore z aumenterà, tanto più diminuirà la frazione; di sorta che, questa frazione diverrà assolutamente nulla, quando z diverrà infinito; e come tale dovrà svanire in paragone di b, che in questo caso sarà infinito per rispetto a $\frac{b}{z}$.

225. Benchè due quantità siano infinitamente piccole, non ne segue però che il loro rapporto sia

nullo, poicchè $\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} = a : b$. D' altronde si comprende che due quantità infinitamente piccole possono contenersi come due quantità grandissime: perciò rappresentando con dx, dy due quantità infinitamente piccole, segue da ciocchè abbiamo precedentemente detto, che non è nullo il rapporto $\frac{dy}{dx}$, risultamento conforme a quello che abbiamo ottenuto per mezzo della considerazione de' limiti.

226. Allorchè una quantità x è infinitamente piccola per rispetto ad una grandezza finita a, il quadrato x^2 è infinitamente piccolo in rapporto ad x. Infatti la proporzione $1 : a = x : x^2$ ci dimostra che x^2 si contiene in x tante volte, quante x nell' unita, cioè un infinito numero di volte. Nello stesso modo si dimostrerebbe, per mezzo della proporzione $x : x^2 = x^2 : x^3$, che essendo x^2 infinitamente piccolo rispetto ad x, dee esserlo ancora il termine x^3 per rispetto ad x^2; Per tal ragione gl' infinitamente piccoli sono stati divisi in differenti ordini: così negli esempii precedenti x è un infinitamente piccolo di prim' ordine; x^2 lo è di secondo ordine; x^3 è infinitamente piccolo di terzo ordine, e così in seguito.

227. Osservisi che se x è infinitamente piccolo per rispetto ad a, lo stesso dovrà dirsi di x moltiplicato per una quantità finita b. Infatti x potendo esser considerato come una frazione, il cui denominatore sarebbe infinito, può rappresentarsi con $\frac{c}{\infty}$: or, o che si abbia $\frac{c}{\infty}$, o $\frac{bc}{\infty}$, queste quantità sono egualmente nulle per rispetto ad a.

228. Come un infinitamente piccolo di prim' ordine dee svanire a fianco di una quantità finita, cui essa non può dare verun aumento, così dee svanire un infinitamente piccolo di second' ordine a fianco di quello di prim' ordine; e così in seguito.

Per esempio se si ha questa espressione

$$a+by+cy^2+dy^3,$$

e che y sia un infinitamente piccolo di prim' ordine, cy^2 ne sarà uno di second' ordine, e dy^3 di terzo; bisogna dunque togliere dy^3, perchè questo non può aumentare cy^2; e come cy^2 non può aumentare by, si cancellerà egualmente: infine si cancellerà ancora by, poicchè questo infinitamente piccolo di prim' ordine non può aumentare la quantità finita a, e resterà a.

229. Due quantità infinitamente piccole x ed y danno per prodotto un infinitamente piccolo di second' ordine: infatti dal prodotto xy se ne tira la proporzione

$$1 : y = x : xy,$$

Ciocchè ci fa comprendere che xy è infinitamente piccolo per rispetto ad x, come lo è y rispetto ad 1, cioè che xy è infinitamente piccolo di second' ordine.

230. Nello stesso modo si dimostrerebbe, che il prodotto di tre quantità infinitamente piccole del primo ordine da un infinitamente piccolo di terzo ordine.

231. Si può ora dar ragione della teorica della differenziazione eseguita col metodo degl' infinitamente piccoli. A tal oggetto se si suppone che in una funzione di x, la variabile x abbia un accrescimento infinitamente piccolo rappresentato da dx, in modo che x divenga $x+dx$, la differenza del nuovo stato dal primo sarà il differenziale di questa funzione.

232. Per esempio, per trovare il differenziale di

ax, poicchè questa funzione diviene $a(x+dx)=ax+adx$, se se ne tolga ax, resterà adx, che sarà il differenziale di ax.

233. Cerchisi di più il differenziale di ax^3; bisognerà da $a(x+dx)^3$ toglierne ax^3; sviluppando, e riducendo, si trova in primo luogo $3ax^2dx+3axdx^2+adx^3$; ciò posto adx^3 essendo un infinitamente piccolo di terzo ordine non può aumentare $3axdx^2$; per conseguenza si cancellerà adx^3; similmente $3adx^2$, ch' è un infinitamente piccolo di second' ordine, dee esser cancellato, perchè $3ax^2dx$ è un infinitamente piccolo di prim' ordine, e restesà $3ax^2dx$, che sarà il differenziale di ax^3.

234. Facendo uso dello stesso principio, si differenzierà ogni altra funzione di x, con aver la cura di cancellare gl' infinitamente piccoli degli ordini superiori; il che riducesi a conservare il solo primo termine dello sviluppo, come appunto si fa col metodo de' limiti.

Per esempio, per trovare il differenziale di fx, in vece di scrivere

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=A+Bh+Ch^2+\text{ecc.},$$

che nel caso del limite da $\frac{dfx}{dx}$ d$\mathfrak{z}=Adx$ pel differenziale di fx, si avrebbe $f(x+dx)=fx+Adx+Bdx^2+Cdx^3+$ ecc.

togliendone la funzione primitiva, resterebbe

$$Adx+Ddx^2+Cdx^3+\text{ecc.};$$

e come si dovrebbero supprimere gl' infinitamente piccoli di ordini superiori, resterebbe il solo termine Adx, che sarebbe il differenziale cercato.

235. Per trovare il differenziale del prodotto di due variabili y, z, si supporrà che quando x diviene

$x+dx$, y diviene $y+dy$, e z diviene $z+dz$. Il prodotto xy si convertirà allora in $(y+dy)(z+dz)$; sviluppando e togliendo yz, resterà $ydz+zdy+dydz$: L' ultimo termine di questo risultamento essendo un infinitamente piccolo di second' ordine, dovrà cancellarsi, e pel differenziale di yz resterà l' espressione $ydz+zdy$.

236. Si dedurrà in seguito da quest' ultimo differenziale quello del prodotto di un maggior numero di variabili, e finalmente quello di x^m, col metodo che abbiamo seguito, allorchè abbiamo impiegato quello de' limiti.

237. Il differenziale di a^x si otterrà ancora facilissimamente, allorchè si avrà lo sviluppo di a^{x+dx}, e questo sviluppo si troverà come quello di a^{x+h}, (art. 36); in seguito si cercherà il valore di $a^{x+dx}-a^x$, e conservando il solo primo termine, si rigetteranno gli altri, come infinitamente piccoli di ordini superiori a quello del termine conservato. Dal differenziale di a^x, se ne dedurrà in seguito quello di $\log x$, come sopra si è fatto.

238. Per ciocchè riguarda il differenziale di sen$x$, si ha sen $(x+dx)$ — sen$x$ = sen$x$ cos dx + sen dx cos x — sen x:

L' arco dx essendo infinitamente piccolo, si ha

$$\cos dx=1\text{ , e }\operatorname{sen} dx=dx;$$

per mezzo di questi valori si trova

$$d\operatorname{sen}x=dx\cos x.$$

239. Il problema delle tangenti ha in certo modo prodotto il calcolo differenziale: ecco in qual modo si scioglie questo problema col metodo degl' infinitamente piccoli.

Sieno PM, e P'M'' (Fig. 3) due ordinate infinitamente vicine; ed MQ una paralella all' asse delle ascisse; la tangente MT potrà essere considerata Fig. 3

Fig. 3 come il prolungamento dell' elemento MM' della curva, poichè questo elemento essendo piccolissimo, può considerarsi come una linea retta: chiamisi AP, x, PM, y, l'accrescimento di x sarà $PP' = dx$, e quello di y sarà $M'Q = dy$. Il triangolo infinitamente piccolo MM'Q essendo simile all' altro MPT, si ha

$$M'Q : MQ = MP : PT,$$

o

$$dy : dx = y : PT;$$

dunque

$$PT = \frac{y dx}{dy}.$$

In seguito si troveranno la normale, la tangente, e l' equazioni di queste linee, come si è fatto negli articoli 70 e 71.

Fig. 3 240. Per avere il differenziale di un arco, si riguarderà l' arco, compreso tra le ordinate PM, e P'M' infinitamente vicine, come una linea retta; ed allora chiamando s l' arco totale, MM' sarà ds, el triangolo MM'Q darà

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2$$

o

$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

estraendone le radice quadrata, sarà

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}.$$

** 241. Il differenziale dell' arco di una curva, rapportata a coordinate polari, si trova benanche facilissimamente per mezzo del metodo degl' infinitamente piccoli. Infatti (Fig. 41) siano RR', MN due archi di cerchio descritti, il primo col raggio c, e l' altro col raggio u, nell' angolo infinitamente piccolo M'AM formato da due raggi vettori, il triangolo NM'M potrà essere riguardato come rettilineo, e rettangolo in N; sicchè si avrà

$$MM' = \sqrt{(NM'^2 + NM^2)};$$

ed osservando che $M'N = du$, e che $MN = udt$, in virtù della proporzione

$$1 : dt = u : MN,$$

potremo rimpiazzare NM' ed MN per mezzo de' loro valori; e, mettendo ds in luogo di MM', si avrà

$$ds = \sqrt{(du^2 + u^2 dt^2)}:$$

Lo stesso triangolo $MM'N$ paragonato all' altro $M'AT$ ci farà ottenere la sottangente di una curva polare per mezzo della proporzione

$$M'N : MN = M'A : AT;$$

o, rimpiazzando AM' con AM, che non ne differisce, se non per una quantità infinitamente piccola,

$$du : udt = u : AT,$$

d' onde si tira

$$AT = u^2 \frac{dt}{du}. \quad **$$

Del metodo di Lagrange per dimostrare i principii del Calcolo differenziale, senza la considerazione de' limiti, degl' infinitamente piccoli, o di qualunque quantità che svanisce.

242. Abbiamo veduto di quale utilità era il teorema di Taylor nello sviluppo delle funzioni in serie. Lagrange avendo osservato che i principii della differenziazione erano rinchiusi in questo teorema, giunse a dimostrarlo, senza far uso del Calcolo differenziale, con un metodo, che anderemo a modificare nel seguente modo.

Sia $y = f(x+h)$; per la natura di questa funzione bisogna, che $f(x+h)$ riducasi a fx, allorchè si fa

$h=0$: ciò avrà luogo, se la parte che contiene h in questa equazione, è un moltiplice di h: rappresentiamola con Ph; si avrà

$$f(x+h)=fx+Ph:$$

Potendo P essere una funzione di h, se indichiamo con p la parte di P indipendente da h, quando $h=0$; e con Qh la parte che dipende da h, avremo $P=p+Qh$: continuando questo ragionamento, si avrà questa serie di equazioni

$$y=fx+Ph$$

$$P=p+Qh$$

$$Q=q+Rh$$

ec. ec. ec.

Mettendo nella prima di queste equazioni il valore di P dato dalla seconda, si avrà

$$y=fx+ph+Qh^2:$$

mettendo in questa equazione, il valore di Q preso nella terza equazione, si avrà

$$y=fx+ph+qh^2+Rh^3;$$

continuando così, e mettendo $f(x+h)$ in luogo di y, si avrà generalmente

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2+rh^3+sh^4+\text{ ecc.. } (133).$$

243. L'espressione $f(x+h)$ rappresenta, in generale, la funzione non ancora sviluppata in serie; se in questa funzione cambiisi x in $x+i$, si avrà lo stesso risultamento, che se si fosse cambiato h in $h+i$. Infatti questa funzione non potendo racchiudere x, senza che questa variabile non sia seguita immediatamente da h, un termine della forma $A(x+h)^m$, per

esempio, diverrà $A(x+i+h)^m$, quando si sarà sostituito $x+i$ ad x; e questa quantità è la stessa di $A(x+h+i)^m$, che risulterebbe dalla sostituzione di $h+i$ in luogo di h nella funzione $A(x+h)^m$; ciocchè dicesi di questo termine, dovendo applicarsi a tutti gli altri, ne segue, che nelle due ipotesi, il primo membro dell' equazione (133) darà luogo a de' risultamenti identici; donde segue che lo sviluppo $fx+ph+qh^2+$ ecc. darà lo stesso risultamento, o rimpiazzando x con $x+i$, o h con $h+i$.

244. Sostituendo primieramente $h+i$ ad h in $fx+ph+qh^2+rh^3+$ ecc., si avrà

$$fx+p(h+i)+q(h+i)^2+r(h+i)^3+\text{ ecc.} \ldots (134);$$

e scrivendo solamente i due primi termini di ciascuno di questi binomii, ne verrà

$$fx+ph+pi+qh^2+2qhi+rh^3+3rh^2i+\text{ ecc.} \ldots (135).$$

In seguito per ottenere il risultamento della sostituzione di $x+i$ in luogo di x nell' espressione $fx+ph+qh^2+rh^3+$ ecc., osservisi, che avendosi in questa serie l' effettivo sviluppo in h, questo accrescimento non entrerà in fx, e ne' coefficienti p, q, r, s ecc., quantità le quali, non potendo racchiudere che x, ne debbano essere riguardate come funzioni; e poicchè l' equazione (133) ha luogo per ogni altra funzione di x, la sostituzione di $x+i$ in vece di x cambierà

$$fx \text{ in } fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{ ecc.}$$

$$p \text{ in } p+p'i+p''i^2+p'''i^3+p^{iv}i^4\text{ ecc.}$$

$$q \text{ in } q+q'i+q''i^2+q'''i^3+q^{iv}i^4+\text{ ecc.}$$

$$r \text{ in } r+r'i+r''i^2+r'''i^3+r^{iv}i^4+\text{ ecc.}$$

$$s \text{ in } s+s'i+s''i^2+s'''i^3+s^{iv}i^4+\text{ ecc.}$$

ecc. ecc. ecc. ecc.

Non v' è di bisogno prevenire, che le lettere accentate rappresentano i coefficienti delle differenti potenze di i in questi sviluppi: Sostituendo questi valori di fx, di p, di q, di r, di s ecc. nella serie $fx+ph+qh^2+rh^3+$ ecc., si otterrà

$$fx+pi+qi^2+ri^3+\text{ ecc.}+(p+p'i+p''i^2+\text{ ecc.})h$$
$$+(q+q'i+q''i^2+\text{ecc})h^2+(r+r'i+r''i^2+\text{ecc})h^3 \text{ ec.} (136).$$

245. Questo sviluppo dovendo essere identico (art. 243) all' altro (135), bisogna che in ambidue gli sviluppi siano eguali i termini che contengono le stesse potenze di h (*nota seconda*); per conseguenza: paragonando i termini affetti da hi, da h^2i, da h^3i, ecc. di essi, si troverà

$$p'=2q,\ q'=3r,\ r'=4s,\ \text{ecc.} \ldots (137).$$

246. Abbiamo veduto, (art. 244), che p era in generale una funzione di x; sicchè rappresentando p con $f'x$, e chiamando $f''x$ il termine che moltiplicherà il coefficiente di h nello sviluppo di $f'(x+h)$; chiamando similmente $f'''x$ il coefficiente di h nello sviluppo di $f''(x+h)$, e così in seguito, avremo queste equazioni

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h)=fx+hf'x+\textit{termini} \text{ in } h^2, \text{in } h^3, \text{ecc.} \\ f'(x+h)=f'x+hf''x+\textit{termini} \text{ in } h^2, \text{in } h^3, \text{ecc.} \\ f''(x+h)=f''x+hf'''x+\textit{termini} \text{ in } h^2, \text{in } h^3, \text{ec.} \\ \quad\text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \end{array}\right\} \ldots (138).$$

247. Per ipotesi abbiamo, (art. 246), $p=f'x$; dunque se in questa equazione si fa $x=x+h$, si avrà

$$p+p'h+p''h^2+p'''h^3+\text{ ecc.}=f'(x+h) \ldots (139);$$

mettendo in questa equazione il valore di $f'(x+h)$ dato dalla seconda dell' equazioni (138), si avrà

$$p+p'h+p''h^2+\text{ecc.}=f'x+hf''x+\textit{termini} \text{ in } h^2, \text{in } h^3, \text{ec.}$$

Questa equazione avendo luogo, qualunque sia il valore di h, bisogna che siano eguali i termini che contengono le stesse potenze di h; dunque sarà

$$p' = f'' x;$$

Questo valore di p' cambierà la prima dell'equazioni (137) in $f''x = 2q$; donde ne dedurremo

$$q = \tfrac{1}{2} f'' x;$$

se in questa equazione si cambierà x in $x + h$, ne verrà

$$q + q'h + q''h^2 + \text{ecc.} = \tfrac{1}{2} f''(x+h);$$

mettendo in luogo di $f''(x+h)$ il suo sviluppo dato dalla terza dell'equazioni (138), avremo

$$q + q'h + q''h^2 + \text{ecc.} = \tfrac{1}{2}(f''x + hf'''x + \\ \textit{termini} \text{ in } h^2, \text{ in } h^3, \text{ ecc.});$$

paragonando i termini che moltiplicano la prima potenza di h, avremo $q' = \tfrac{1}{2} f'''x$, valore, che messo nella seconda dell'equazioni (137), la cambierà in $\tfrac{1}{2} f'''x = 3r$, d'onde si dedurrà

$$r = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} f''' x;$$

continuando così, troveremo successivamente tutti gli altri coefficienti dell'equazione (133); sostituendo in questa equazione i valori di p, di q, di r ecc., si avrà

$$f(x+h) = fx + hf'x + \frac{h^2}{1.2} f''x + \frac{h^3}{2.3} f'''x + \text{ecc.} \ldots (140)$$

248. Se si esamina ora la prima dell'equazioni (138), si vedrà che $f'x$, essendo il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$, rappresenta $\frac{dfx}{dx}$, o $\frac{dy}{dx}$; si-

milmente esaminando la seconda dall' equazioni (138), si vedrà, che il coefficiente $f''x$ della prima potenza di h, nello sviluppo di $f'(x+h)$ debba rappresentare

$$\frac{\mathrm{d}f'x}{\mathrm{d}x}, \text{ cioè } \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2};$$

e così in appresso; per conseguenza, sostituendo nell' equazione (140) questi valori di fx, di $f'x$, di $f''x$ ecc., si troverà

$$f(x+h)=fx+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}h+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.}..(141).$$

249. In tal modo si arriva alla dimostrazione della formola di Taylor, senza far uso del calcolo differenziale. L' espressione $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, che entra in questa formola, è il segno dell' operazione, per mezzo della quale si ottiene il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$: trovato questo coefficiente, l' espressioni $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$, ecc. c' indicano, che col ripetere la stessa operazione, potremo conoscere i coefficienti delle altre potenze di h; di sorta che non abbiamo bisogno, che di conoscere, per mezzo dell' Algebra, ciocchè dee essere $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ per ogni funzione. Per esempio se si domandasse quale è il valore di $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, allorchè la funzione è x^m, si svilupperebbe $(x+h)^m$ per mezzo della formola del binomio, che darebbe $x^m+mx^{m-1}h+$ ecc., e come $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dovrebbe indicare

il coefficiente della prima potenza di h in questo sviluppo, si avrebbe $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$. In tal modo tutto riducesi a poter trovare con metodi analitici lo sviluppo delle differenti specie di funzioni, che l'Algebra può presentare: questi metodi non sono differenti da quelli, che abbiamo fatto conoscere per sviluppare le diverse funzioni, le quali per mezzo della loro combinazione, danno tutte le altre: è in tal modo che abbiamo ottenuto gli sviluppi di

$$a^{x+h}, \text{ di } \log(x+h), \text{ di } \cos(x+h), \text{ ecc.}$$

250. Ecco dunque un terzo metodo, col quale i principii del calcolo differenziale trovansi dimostrati in una maniera indipendente da ogni considerazione di limiti, infinitamente piccoli, o di quantità che svaniscono; ma questo metodo nondimeno non può escludere quello de' limiti, perchè quando si discende alle applicazioni, e che si vuole, per esempio, determinare i volumi, o le superficie, rettificare le curve, o ottenere l'espressioni delle sottangenti, delle summormali ecc., si dee sempre ricorrere a' limiti, o agl'infinitamente piccoli.

251. Considerando gli sviluppi delle diverse funzioni $(x+h)^m$, a^{x+h}, $\log(x+h)$, $\text{sen}(x+h)$ ecc.; che l'Algebra ci offre; come queste funzioni sono in numero molto limitato, si può facilmente riconoscere, che, ne' loro sviluppi il coefficiente della prima potenza di h non è nè nullo, nè infinito, almeno finchè x conserva il suo valore indeterminato; ciocchè per altro risulta dalla dimostrazione precedente. Infatti supponiamo che fosse $p=0$ nell'equazione

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2+rh^3+\text{ecc.}$$

potrebbero accadere due casi: o il valore di x, che rinchiudesi in p, dovrebbe esser dato da un' equazione identica, o da una che tale non fosse; in quest' ultimo caso $p=0$ rappresenterebbe un' equazione di un certo grado, e questa equazione non darebbe che un numero limitato di valori di x, ciocchè sarebbe contra l' ipotesi, che suppone in x una quantità indeterminata; ma se $p=0$, cioè $f'x=0$ fosse un' equazione identica in x (*), facendo $x=x+h$, si avrebbe ancora $f'(x+h)=0$, e come h entrerebbe ovunque entra x, questa equazione, considerata per rispetto ad h, sarebbe ancora identicamente nulla, o, in altri termini, questa equazione avrebbe luogo per qualunque valore di h; lo stesso avrebbe anche luogo nel suo sviluppo, che, dietro l' equazione (139) è

$$p+p'h+p''h^2+p'''h^3+\text{ ecc.}=0.$$

Ma allorchè un' equazione di questo genere è nulla, indipendentemente da h, bisogna che i coefficienti delle differenti potenze di h siano nulli separatamente (*nota seconda*), e che perciò si abbia

$$p'=0,\ p''=0,\ p'''=0,\ \text{ecc.}$$

Sostituendo questi valori nell' equazioni

$$p'=2q,\ p''=3r,\ p'''=4s,\ \text{ecc.},$$

che risultano dall' identità de' termini affetti dalle stesse potenze di ih, di i^2h, di i^3h, nelle serie (134) e (136), si otterrebbe

$$q=0,\ r=0,\ s=0\ \text{ecc.};$$

---

* Il caso nel quale p non contiene x è compreso in questo, poicchè se il valore di p, ch' è nullo, rappresentisi con $a-a$, può esprimersi con $a-x-(a-x)$.

e come inoltre $p=0$, l' equazione (133) si ridurrebbe a

$$f(x+h)=fx\,;$$

bisognerebbe dunque che $x+h$ sostituito ad x non combiasse la funzione, ciocchè esige che questa funzione fosse identica, o costante; poicchè è noto che se, per esempio, fx fosse della forma x^2-x^2, o dell' altra $c+x^2-x^2$, la sostituzione di $x+h$ in vece di x, darebbe sempre lo stesso risultamento; e si vede che nel primo caso la funzione sarebbe identica, e nel secondo si ridurrebbe ad una costante c. Segue da ciocchè precede, che il coefficiente della prima potenza di h non può essere nullo nello sviluppo generale di $f(x+h)$,

Non sarebbe meno assurdo il supporre questo coefficiente infinito; poicchè il secondo membro dell' equazione (133), divenendo infinito, tale sarebbe ancora il primo, cioè si avrebbe $f(x+h)=\infty$; e come $f(x+h)$ è formato in $x+h$, come lo è fx in x, il termine che in $f(x+h)$ renderebbe infinita questa espressione, dovrebbe render parimente infinito fx. Per esempio se $f(x+h)$ racchiudesse un termine della forma $\frac{A}{(x+h)-(x+h)}$, ch' è infinito, egli è evidente, che si dovrebbe avere in fx il termine $\frac{A}{x-x}$, che sarebbe parimente infinito. Segue da ciò che la funzione proposta sarebbe infinita, ciocchè noi non supponiamo.

252. L' espressioni $f'x$, $f''x$, $f'''x$ ec. sono ciocchè Lagrange chiama *funzione prima*, *funzione seconda*, *funzione terza* ec., ed in generale ne sono le funzioni derivate. Lagrange indica le funzioni derivate anche in un altro modo, rimpiazzando $\frac{dy}{dx}$ con

y', $\frac{d^2y}{dx^2}$ con y'', $\frac{d^3y}{dx^3}$ con y''', e così in seguito.

De' casi, ne' quali la formula di Taylor è in difetto.

253. ** In generale, allorchè in una funzione di x si sostituisce $x+h$ ad x, la forma della funzione resta la stessa, poicchè $x+h$ entra ovunque era prima x; perciò allorchè fx comprende un radicale, $f(x+h)$ dee anche comprenderlo: per esempio se si ha

$$fx=bx^2+\frac{a}{\sqrt{(x)}},$$

lo stesso radicale si troverà nell' espressione

$$f(x+h)=b(x+h)^2+\frac{a}{\sqrt{(x+h)}}.$$

254. Non potrebbe dirsi sempre lo stesso, se si desse ad x un valore particolare, cioè determinato; per esempio se $\sqrt[3]{(x-a)}$ entrasse in fx, bisognerebbe che $f(x+h)$ contenesse il termine

$$\sqrt[3]{(x+h-a)};$$

or l'ipotesi di $x=a$ farebbe svanire $\sqrt[3]{(x-a)}$, che si trova in fx, mentre che la stessa ipotesi ridurrebbe il termine $\sqrt[3]{(x+h-a)}$, ch'entra in $f(x+h)$ a $\sqrt[3]{(h)}=h^{\frac{1}{3}}$: dunque in tal caso lo sviluppo di $f(x+h)$ conterrebbe un radicale che non esisterebbe in fx, e che perciò non potrebbe svilupparsi secondo le potenze intere di h.

Questa impossibilità si manifesterebbe per mezzo de' valori infiniti, che prenderebbero i coefficienti differenziali: per esempio, se si avesse l'equazione

$$y=\sqrt[3]{(x-a)},$$

differenziandola si troverebbe

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}(x-a)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}}$$

e si vede che il valore di questo coefficiente differenziale diviene infinito, allorchè si fa $x=a$.

255. Sia in generale

$$f(a+h)=A+Bh+Ch^2+Dh^3\ldots$$
$$+Mh^n+Nh^{n+\frac{1}{z}}+\text{ecc}\ldots\ (142)$$

lo sviluppo che potremo supporre di essersi ottenuto facendo $x=a$, nel quale $n+\dfrac{1}{z}$ rappresenti una quantità che cade tra n, ed $n+1$: andremo a dimostrare che il coefficiente differenziale dell' ordine $n+1$ è infinito. A tal oggetto riguardando a come una variabile, sappiamo (art. 53, e 54), che si ha

$$\frac{df(a+h)}{da}=\frac{df(a+h)}{dh},\ \frac{d^2f(a+h)}{da^2}=$$
$$\frac{d^2f(a+h)}{dh^2}\ \text{ecc.}\ldots\ (143)$$

Differenziamo successivamente l' equazione (142) rispetto ad h, e supponiamo per brevità che M', N', M'', N'' ecc: rappresentino ciocchè divengono i coefficienti M, N nelle successive differenziazioni; avremo

$$\frac{df(a+h)}{dh}=B+2Ch+3\,Dh^2\ldots$$
$$+M'h^{n-1}+N'h^{n+\frac{1}{z}-1}+\text{ecc.}$$
$$\frac{d^2f(a+h)}{dh^2}=2C+2.3Dh\ \ldots$$

$$+M''h^{n-2}+N''h^{n+\frac{1}{z}-2}+\text{ecc.}$$

ec. ec. ec. ec. ;

rimpiazzando i primi membri di queste ultime equazioni per mezzo da' loro valori dati dall' equazioni (143), otterremo

$$\frac{df(a+h)}{da}=B+2Ch+3Dh^2\ldots$$

$$+M'h^{n-1}+N'h^{n+\frac{1}{z}-1}+\text{ecc.}\ldots(144)$$

$$\frac{d^2f(a+h)}{da^2}=2C+2.3Dh\ldots$$

$$+M''h^{n-2}+N''h^{n+\frac{1}{z}-2}+\text{ecc.}\ldots(145)$$

ec. ec. ec. ec.

facendo $h=0$ nell' equazioni (142), (144), e (145) ec., si avrà

$$fa=A,\ \frac{dfa}{da}=B,\ \frac{d^2fa}{da^2}=2C,\ \text{ecc.}$$

Ciò basta per determinare i coefficienti A, B, C ecc. dell' equazione (142).

Ciò posto, dalla sola osservazione dell' equazione (144), e (145) apparisce, che n diminuendo di una unità in ogni differenziazione, allorchè saremo giunti alla nesima differenziazione, si avrà

$$\frac{d^nf(a+h)}{da^n}=\ldots Ph^{n-n}+Qh^{n-n+\frac{1}{z}}+\text{ec.}$$

$$=P+Qh^{\frac{1}{z}}+\text{ecc.};$$

e nella differenziazione seguente si troverà

$$\frac{d^{n+1}f(a+h)}{da^{n+1}}=Rh^{\frac{1}{z}-1}+\text{ecc.}$$

Ora $\frac{1}{z}$ essendo minore dell' unità, $\frac{1}{z}-1$ è un numero negativo : dunque l'equazione precedente potrà scriversi così

$$\frac{d^{n+1}f(a+h)}{da^{n+1}} = \frac{R + \text{ec.}}{h^{-(1-\frac{1}{2})}} :$$

per conseguenza, allorchè si farà $h=0$ per determinare il coefficiente di uno de' termini dell' equazione (142), si troverà

$$\frac{d^{n+1}f(a)}{da^{n+1}} = \frac{R}{0} = \infty ;$$

lo stesso avverrà, allorchè si vorranno determinare i coefficienti differenziali di un ordine superiore.

Risulta da questo teorema, che *allorchè si fa* x=a *nello sviluppo di* f(x+h), *se in questo sviluppo vi è una potenza fratta di h, e ch' essa sia compresa tra' termini affetti da h^n, e da h^{n+1}, non si possono determinare i termini della serie di Taylor, che fino all' ordine* n *inclusivamente : tutti gli altri termini diverranno infiniti.*

256. Se è data una funzione di x, e si vuol determinare lo sviluppo di $f(x+h)$, nell' ipotesi di $x=a$, bisognerà, com' è noto, calcolare i termini della serie

$$fx + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} \text{ ecc.}$$

Ma se, facendo questo calcolo, si trova che uno de' coefficienti differenziali diviene infinito nell' ipotesi di $x=a$, non si progredirà oltre nello sviluppo di $f(x+h)$ della serie di Taylor ; ecco però il metodo che bisognerà impiegare. *Si porrà $x+h$ in luogo di x nella fx ; allora il termine che contiene* x—a *nel denominatore conterrà* x—a+h, *e non diverrà più infinito, allorchè si fa* x=a ; *ma darà luogo ad un termine affetto da una potenza fratta di* h

257. Sia per esempio

$$fx = 2ax - x^2 + a\sqrt{(x^2 - a^2)};$$

differenziando si trova

$$\frac{dy}{dx} = 2(a-x) + \frac{ax}{\sqrt{(x^2-a^2)}};$$

sostituendo questi valori, e quelli di $\frac{d^2y}{dx^2}$, di $\frac{d^3y}{dx^3}$ ecc. nella formola di Taylor, (art. 55), si otterrà

$$f([x+h) = 2ax - x^2 + a\sqrt{(x^2-a^2)} + [2(a-x)$$
$$+ \frac{ax}{\sqrt{(x^2-a^2)}}]h + \text{ecc.}:$$

Or quando è $x=a$, il termine moltiplicato per h diviene infinito; dunque questo sviluppo non è più possibile

In questo caso, secondo la regola precedente, si metterà $x+h$ in luogo di x nell'equazione

$$fx = 2ax - x^2 + a\sqrt{(x^2 - a^2)},$$

e si troverà

$$f(x+h) = 2ax + 2ah - x^2 - 2xh - h^2$$
$$+ a\sqrt{(x^2 + 2xh + h^2 - a^2)},$$

equazione, che nell'ipotesi di $x=a$, diviene

$$f(a+h) = a^2 - h^2 + a\sqrt{(2ah + h^2)}$$

o

$$f(a+h) = a^2 - h^2 + a\sqrt{h}\sqrt{(2a+h)};$$

sviluppando colla formula del binomio, e rappresentando per brevità i coefficienti di questa formola colle lettere A, B, C ecc., si ha

$$\sqrt{(2a+h)} = (2a+h)^{\frac{1}{2}} = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \text{ecc.};$$

sostituendo si trova

$$f(a+h) = a^2 - h^2 + aA\sqrt{(h)} + aBh\sqrt{(h)} + aCh^2\sqrt{(h)} + \text{ec}$$

Si vede da questo esempio che mettendo $x+h$ nella funzione, e facendo $x=a$, possono introdursi una o più potenze fratte di h; si sviluppino in seguito separatamente i termini che sono suscettibili di esserlo, sia per mezzo della formola del binomio, sia altrimenti, e si sostituiscano questi termini nel valore di $f(a+h)$, ciocchè ne darà lo sviluppo.

258. Allorchè x resta indeterminato, Lagrange ha dimostrato, che lo sviluppo di $f(x+h)$ non poteva contenere termini affetti da una potenza fratta di h. Infatti supponiamo che si avesse

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \ldots\ldots + K\sqrt[3]{(h)};$$

come $k\sqrt[3]{(h)}$ è suscettibile di tre valori M, N, P, si avranno questi tre sviluppi di $f(x+h)$.

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \ldots\ldots + M$$
$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \ldots\ldots + N$$
$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \ldots\ldots + P:$$

Or dovendo fx comprendere gli stessi radicali di $f(x+h)$, (art. 253), bisogna che fx abbia ancora tre valori differenti Q, R, S; sostituendo successivamente questi valori in luogo di x, si avrà

$$f(x+h)=Q+ph+qh^2 \ldots\ldots + M$$
$$f(x+h)=Q+ph+qh^2 \ldots\ldots + N$$
$$f(x+h)=Q+ph+qh^2 \ldots\ldots + P$$
$$f(x+h)=R+ph+qh^2 \ldots\ldots + M$$
$$f(x+h)=R+ph+qh^2 \ldots\ldots + N$$
$$f(x+h)=R+ph+qh^2 \ldots + P$$
$$f(x+h)=S+ph+qh^2 \ldots\ldots + M$$
$$f(x+h)=S+ph+qh^2 \ldots\ldots + N$$
$$f(x+h)=S+ph+qh^2 \ldots\ldots + P$$

di maniera che l' espressione $f(x+h)$ sviluppata avrebbe nove valori differenti, mentre che non sviluppata non potrebbe averne che quelli soli che fx comporta, cioè tre nell' ipotesi attuale: perciò non può supporsi che lo sviluppo di $f(x+h)$ contenga una potenza fratta di h, senza cadere in una contradizione.

259. Egli è egualmente facile di dimostrare che $f(x+h)$ non può contenere nel suo sviluppo un termine affetto da una potenza negativa di h, poicchè se contenesse un termine della forma Mh^{-n}, si avrebbe

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \ldots + \frac{M}{h^n};$$

or facendo $h=o$, il primo membro si cambia in fx, el secondo, invece di ridursi a fx, diviene infinito, a cagione del termine $\frac{M}{h^n}$ che comprende.

260. Lo stesso avrebbe luogo, se lo sviluppo contenesse un termine affetto dal logaritmo di h; poicchè se si avesse, per esempio, un termine come $A \log h$, questo, facendo $h=o$, diverrebbe $A \log o$; or il logaritmo di o essendo infinito negativo, tale sarebbe il termine $A \log h$, d' onde segue che fx dovrebbe esserlo ancora, ciocch' è contra l' ipotesi.

FINE DEL CALCOLO DIFFERENZIALE.

TAVOLA DELLE MATERIE.

CALCOLO DIFFERENZIALE.

FINE DELLA TAVOLA.